

ЭФФЕКТЫ ДИССИПАТИВНОГО ТУННЕЛИРОВАНИЯ: ТЕОРИЯ И СРАВНЕНИЕ С ЭКСПЕРИМЕНТОМ

Аннотация

Актуальность и цели. Интерес к науке о диссипативном туннелировании в последние годы заметно возрос в связи с развитием технологии наноструктур, а также широким использованием в исследованиях свойств наноструктур атомного силового и сканирующего туннельного микроскопа. Актуальность этих исследований с прикладной точки зрения связана с перспективами разработки элементной базы квантовых компьютеров, лазеров на примесных переходах, фотоприемников с управляемыми характеристиками и т.д. С фундаментальной точки зрения представляют интерес исследования таких нелинейных туннельных эффектов, как двумерные туннельные бифуркации, квантовые биения, стохастизация режима туннелирования и др. Целью настоящей работы является теоретическое исследование влияния двух локальных фононных мод на 1D- и 2D-диссипативное туннелирование в условиях внешнего электрического поля при конечной температуре в системе совмещенного атомного силового и сканирующего туннельного микроскопа для туннельно связанных квантовых точек, а также сравнение полученных теоретических результатов с данными эксперимента.

Материалы и методы. Расчет полевой зависимости вероятности 1D- и 2D-диссипативного туннелирования выполнен для модельного осцилляторного потенциала с учетом взаимодействия с одной и двумя локальными фононными модами среды-термостата в рамках квазиклассического приближения методом инстантонов. Проводится качественное сравнение полученных полевых зависимостей с экспериментальными туннельными вольт-амперными характеристиками для полупроводниковых квантовых точек из InAs, а также для квантовых точек из коллоидного золота на начальном этапе их формирования.

Результаты. Теоретически выявлен режим осциллирующего одномерного диссипативного туннелирования с учетом влияния двух локальных фононных мод диэлектрической матрицы, качественно объясняющий отдельные экспериментальные туннельные вольт-амперные характеристики для квантовых точек InAs/ GaAs с неэквидистантными и немонотонными по амплитуде характерными пиками. Показано, что в режиме синхронного параллельного переноса туннелирующих частиц с иглы кантилевера в квантовую точку наличие двух локальных фононных мод приводит к появлению двух устойчивых пиков на полевой зависимости вероятности двумерного диссипативного туннелирования. Проведено качественное сравнение теоретической кривой в пределе слабой диссипации с экспериментальной туннельной вольт-амперной характеристикой для растущих квантовых точек из коллоидного золота под иглой кантилевера на начальном этапе формирования, когда размер квантовых точек не превышает 10 нм. Установлено, что на температурной зависимости вероятности двумерного диссипативного туннелирования один из двух устойчивых пиков, соответствующих взаимодействию туннелирующих частиц с двумя локальными фононными модами, может расщепляться на два, что может быть связано с механизмом интерференции каналов туннелирования. Найдено, что вблизи точки бифуркации реализуется теоретически предсказанный и экспериментально наблюдаемый режим квантовых биений.

Выводы. Параметры диссипативного туннелирования (частоты локальных фононных мод, коэффициенты взаимодействия туннелирующей частицы с этими фононными модами) наряду с температурой и напряженностью внешнего электрического поля позволяют эффективно управлять туннельным транспортом в квантовых точках под иглой кантилевера совмещенного атомного силового и сканирующего туннельного микроскопа.

Ключевые слова: квантовая точка, квазиклассическое приближение, метод инстантонов, диссипативное туннелирование, электрическое поле, атомный силовой и сканирующий туннельный микроскоп.

P. V. Krevchik, V. D. Krevchik, M. B. Semenov

EFFECTS OF DISSIPATIVE TUNNELING: THEORY AND COMPARISON WITH AN EXPERIMENT

Abstract.

Background. The interest in the dissipative tunneling theory in recent years has significantly increased because of the nanostructures technology development, as well as because of the wide usage in scientific research of properties of nanostructure atomic force and scanning tunneling microscopes. The relevance of these studies from the practical point of view is associated with development prospects of the element base for quantum computers, for lasers, based on impurity transitions, for photodetectors with controlled characteristics, etc. From a fundamental point of view, researching of such nonlinear tunneling effects, as two-dimensional tunnel bifurcations, quantum beats, stochastization in tunneling transfer etc, are of great interest. The aim of this work is to theoretically study the influence of two local phonon modes on 1D- and 2D - dissipative tunneling under an external electric field at the finite temperature in the system of combined atomic force and scanning tunneling microscopes for tunnel-coupled quantum dots, as well as to compare the theoretical results with the experimental data.

Materials and methods. Calculations of the field dependence for the 1D and 2D - dissipative tunneling probability were carried out for the model oscillator potential, taking into account the interaction with one or two local phonon modes of the wide-band matrix within the semiclassical instanton approximation. A qualitative comparison of the obtained theoretical field dependence in the dissipative tunnel probability with experimental tunnel current-voltage characteristics for semiconductor quantum dots of InAs, as well as for quantum dots of colloidal gold at the initial stage of their formation, were also fulfilled.

Results. The authors have theoretically identified a regime of oscillating one-dimensional dissipative tunneling, taking into account the influence of two local phonon modes of the dielectric matrix that gives qualitative explanation of some experimental tunnel current-voltage characteristics for quantum dots of InAs / GaAs with the nonequidistant and non-monotonic amplitude characteristic peaks. It is shown that in the mode of synchronous parallel tunnel transfer from a cantilever tip to a quantum dot the presence of two local phonon modes leads to appearance of two stable peaks on the field dependence of the two-dimensional dissipative tunneling probability. A qualitative comparison of the theoretical curve in the weak dissipation limit with the experimental tunnel current - voltage characteristics was carried out for growing quantum dots of colloidal gold under a cantilever tip at the initial stage of its formation, when the size of quantum dots did not exceed 10 nm. It has found that on the temperature dependence of the two-dimensional dissipative tunneling probability one of two stable peaks, corresponding to interaction of tunneling particles with two local phonon modes, can be splitted into two that may be

realized due to the interference mechanism for tunnel channels. It has been discovered that near the bifurcation point the theoretically predicted and experimentally observed quantum-beat mode regime can be realized.

Conclusions. Dissipative tunneling parameters (frequencies of local phonon modes, coefficients of the tunnel particle interaction with these phonon modes) as also the temperature and the intensity of an external electric field can effectively manage the tunnel transport in quantum dots under a cantilever tip of the combined atomic force and scanning tunneling microscopes.

Key words: quantum dot, quasiclassical approximation, instanton method, dissipative tunneling, electric field, atomic force and scanning tunnel microscopes.

Введение

Теория квантового туннелирования с диссипацией получила развитие в пионерских работах Э. Дж. Леггетта, П. Вольниса, Я. Аффлека, А. И. Ларкина, Ю. Н. Овчинникова и других применительно к системам с контактами Джозефсона [1]. В рамках квазиклассического приближения и метода инстантонов, используя модельный потенциал кубической параболы, удалось получить аналитические результаты для вероятности туннелирования при конечной температуре с учетом взаимодействия с осцилляторами среды с точностью до предэкспоненциального фактора в пределах слабой и сильной диссипации с учетом надбарьерных переходов и переходов вблизи вершины барьера. В работе Ю. Н. Овчинникова и Б. И. Ивлева для двумерных систем взаимодействующих контактов Джозефсона впервые был теоретически предсказан эффект туннельных бифуркаций [1], который не удалось экспериментально наблюдать из-за шумов в окрестности точки бифуркации. Позднее эта теория была развита для описания кинетики 1D- и 2D-низкотемпературных химических реакций как туннельных систем с диссипацией [1, 2], при этом также удалось впервые получить аналитические результаты для модельного двухъямного осцилляторного потенциала при конечной температуре в пределах слабой и сильной диссипации. Эффект 2D-бифуркаций удалось обобщить на случай антипараллельного переноса, реализуемого в системах типа порфиринов. И хотя он оказался неустойчивым, его удалось экспериментально наблюдать в виде излома на температурной зависимости соответствующей скорости химической реакции антипараллельного переноса протонов для двумерной структуры порфиринов [1, 3]. В более поздних работах А. А. Овчинникова, Ю. И. Дахновского, М. Б. Семенова, В. Д. Кревчика устойчивый эффект 2D-бифуркаций был предсказан для двумерного параллельного переноса в модельном двухъямном осцилляторном потенциале [3], который не реализуется в квантовой химии. Впервые наука о квантовом туннелировании с диссипацией применительно к туннельно-связанным наноструктурам получила развитие в работах В. Д. Кревчика, М. Б. Семенова и др. [1, 3–10]. Эксперимент, выполненный в лаборатории зондовой микроскопии Нижегородского государственного университета им. Н. И. Лобачевского, с квантовыми точками (КТ) из коллоидного золота размером до 5 нм в системе совмещенного атомного силового и сканирующего туннельного микроскопа (АСМ/СТМ) с платинированной иглой кантилевера радиусом около 40 нм, имеющей наноразмерные выступы, позволил выявить на отдельных туннельных вольт-амперных характеристиках (ВАХ) (при одной из полярностей) резкий

излом. Этот излом удалось качественно сопоставить с точкой 2D-бифуркации, т.е. точкой смены режима двумерного туннельного переноса с синхронного на асинхронный, на теоретической полевой зависимости вероятности 2D-диссипативного туннельного параллельного переноса в модельном двухъямном осцилляторном потенциале во внешнем электрическом поле при конечной температуре в пределе слабой диссипации (в пренебрежении взаимодействием с локальными фононными модами матрицы) [1, 6].

Среди экспериментально подтвержденных ранее эффектов диссипативного туннелирования – наблюдаемый единичный пик при одной из полярностей внешнего электрического поля в системе АСМ/ СТМ на туннельных ВАХ для КТ из циркония и коллоидного золота, что качественно отвечает единичному пику на полевой зависимости вероятности 1D-диссипативного туннелирования в пределе слабой диссипации (без учета влияния локальных фононных мод матрицы). Наличие одной локальной фононной моды приводит к тому, что упомянутый пик, отвечающий случаю симметричного двухъямного осцилляторного потенциала при определенном значении напряженности внешнего электрического поля, становится неустойчивым. Однако появляется дополнительный устойчивый пик, отвечающий взаимодействию с выделенной осцилляторной фононной модой [5]. В рамках рассмотренных ранее теоретических моделей 1D- и 2D-диссипативного туннелирования с учетом влияния одной локальной фононной моды не удалось качественно объяснить ряд полученных экспериментальных ВАХ для полупроводниковых КТ.

Целью настоящей работы является теоретическое исследование влияния двух локальных фононных мод на 1D- и 2D-диссипативное туннелирование в условиях внешнего электрического поля при конечной температуре в системе совмещенного атомного силового и сканирующего туннельного микроскопа для туннельно связанных КТ. В том числе теоретически изучается влияние двух промотирующих фононных мод на режимы двумерных туннельных бифуркаций и квантовых биений. Проводится качественное сравнение полученных полевых зависимостей вероятности 2D-диссипативного туннелирования в пределе слабой диссипации (малые коэффициенты взаимодействия туннелирующих частиц с двумя локальными фононными модами) с имеющимися экспериментальными туннельными ВАХ для растущих КТ из коллоидного золота на начальном этапе их формирования (когда размер КТ не превышает 10 нм).

В случае учета влияния двух локальных фононных мод на вероятность 1D-диссипативного туннелирования с точностью до предэкспоненциального фактора удалось выявить осциллирующий туннельный режим, который позволил качественно объяснить отдельные экспериментальные туннельные ВАХ для квантовых точек InAs/ GaAs с неэквидистантными и немонотонными по амплитуде характерными пиками [11].

В заключении работы делаются выводы о влиянии параметров диссипативного туннелирования, а также температуры и напряженности внешнего электрического поля на туннельный транспорт через КТ квантовые точки под иглой кантилевера совмещенного атомного силового и сканирующего туннельного микроскопа.

Эффекты 1D-диссипативного туннелирования с учетом влияния двух локальных фононных мод

Рассматривается модель 1D-диссипативного туннелирования с учетом влияния двух промотирующих фононных мод среды-термостата для процесса туннелирования через структуру единичных КТ в системе совмещенного АСМ/СТМ. Проводится качественное сравнение теоретической кривой вероятности 1D-туннелирования с экспериментальной ВАХ контакта АСМ зонда к поверхности КТ из InAs [11].

Для того чтобы воспользоваться стандартной моделью для определения вероятности диссипативного туннелирования, будем использовать следующие обозначения для перенормированного двухъямного осцилляторного потенциала во внешнем электрическом поле:

$$q_1 = b^* = b + \frac{|e|E}{\omega_0^2}, \quad q_0 = a^* = a - \frac{|e|E}{\omega_0^2},$$

где q_0 и q_1 – положения минимумов перенормированного двухъямного осцилляторного потенциала вдоль координаты туннелирования. Тогда модельный перенормированный 1D-потенциал можно представить в стандартном виде. С учетом результатов, полученных ранее в [1, 2], модельный гамильтониан системы может быть записан как

$$\hat{H} = \frac{p_1^2}{2} + v_1(y_1) + y_1 \sum_{\alpha=2}^N C_{\alpha} y_{\alpha} + \frac{1}{2} \sum_{\alpha=2}^N (p_{\alpha}^2 + \omega_{\alpha}^2 y_{\alpha}^2), \quad (1)$$

где

$$v_1(y_1) = \left(\frac{1}{2} \omega_1^2 y_1^2 + \lambda y_1 \right) \theta \left(-\frac{\Delta I}{2\lambda} - y_1 \right) + \left(\frac{1}{2} \omega_1^2 y_1^2 - \lambda y_1 - \Delta I \right) \theta \left(\frac{\Delta I}{2\lambda} + y_1 \right). \quad (2)$$

Вероятность туннелирования частицы в единицу времени может быть найдена в квазиклассическом приближении. Необходимо, чтобы дебройлевская длина волны частицы была много меньше характерного линейного масштаба потенциала. Для этого вполне достаточно, чтобы высота барьера была много больше энергии нулевых колебаний в яме начального состояния. Кроме квазиклассического приближения, мы должны предположить квазистационарность распада, т.е. ширина уровня Γ , с которого туннелирует частица, должна быть много меньше энергии нулевых колебаний. Находим 1D-квазиклассическое действие в одноинстантонном приближении с учетом влияния среды-термостата:

$$S_B = 2\omega_0^2 (q_0 + q_1) q_0 \tau_0 - \frac{2\omega_0^2 (q_0 + q_1)^2 \tau_0^2}{\beta} - \frac{4\omega_0^4 (q_0 + q_1)^2}{\beta} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin^2 v_n \tau_0}{v_n^2 (v_n^2 + \omega_0^2 + \zeta_n)}. \quad (3)$$

Предэкспоненциальный множитель определяется вкладом траекторий, близко расположенных от инстантона. С учетом этого мы должны разложить

действие до квадратичного члена по отклонениям $q - q_B$ и проинтегрировать в функциональном пространстве. Тогда вероятность туннелирования в единицу времени можно записать как

$$\Gamma = B \exp(-S_B), \quad (4)$$

$$B = \left[\frac{S_0}{2\pi} \cdot \frac{\det \left(\frac{\delta^2 S}{\delta q^2} \right)_{q=-q_0}}{\det' \left(\frac{\delta^2 S}{\delta q^2} \right)_{q=q_B(\tau)}} \right]^{1/2}, \quad (5)$$

$$S_0 = \int_{-\beta/2}^{\beta/2} \dot{q}_B^2(\tau) d\tau, \quad (6)$$

$\det'$ означает, что нулевое собственное значение, соответствующее нулевой моде инстантона, опущено. Отметим, что вывод этой формулы предполагает приближение идеального инстантонного газа

$$\Gamma \ll (\Delta\tau)^{-1}, \quad (7)$$

где $\Delta\tau$ – ширина перехода от положительного значения траектории к отрицательному. Вычисление предэкспоненциального множителя в рассматриваемой модели приводит к результату

$$B = \frac{2\omega_0^2 (q_0 + q_1)^2}{(2\pi\beta)^{1/2}} \cdot \sum_{n=-\infty}^{\infty} \frac{\sin^2 v_n \tau_0}{\lambda_{0n}} \left(\sum_{n=-\infty}^{\infty} \frac{\cos 2v_n \tau_0}{\lambda_{0n}} \right)^{-1/2}. \quad (8)$$

Рассмотрим (3) с учетом взаимодействия с двумя локальными фононными модами ($\omega_{L1} = \omega_2$ и $\omega_{L2} = \omega_3$). Для упрощения будем предполагать это взаимодействие достаточно малым, т.е. $\frac{C}{\omega_0^2} \ll 1$ и $\frac{C}{\omega_L^2} \ll 1$. В этом случае

$$\zeta_n = v_n^2 \sum_{\alpha=2}^N \frac{C_\alpha^2}{\omega_\alpha^2 (\omega_\alpha^2 + v_n^2)},$$

где $v_n = \frac{2\pi n}{\beta}$; $\beta = \frac{\hbar}{kT}$;

$$\zeta_n = v_n^2 \frac{C_2^2}{\omega_2^2 (\omega_2^2 + v_n^2)} + v_n^2 \frac{C_3^2}{\omega_3^2 (\omega_3^2 + v_n^2)}. \quad (9)$$

Окончательные формулы для вероятности 1D-диссипативного туннелирования $\Gamma = B \exp(-S)$ в осциллирующем и неосциллирующем режиме

с учетом влияния двух локальных фононных мод приведены в приложении А (см. также [5, 10]¹).

Дополнительный эксперимент по визуализации локальной плотности состояний в квантовых точках InAs/GaAs методом комбинированной АСМ/СТМ был выполнен в Казанском физико-техническом институте КНЦ РАН при участии ННГУ им. Н. И. Лобачевского [11]. Схема эксперимента представлена на рис. 1.

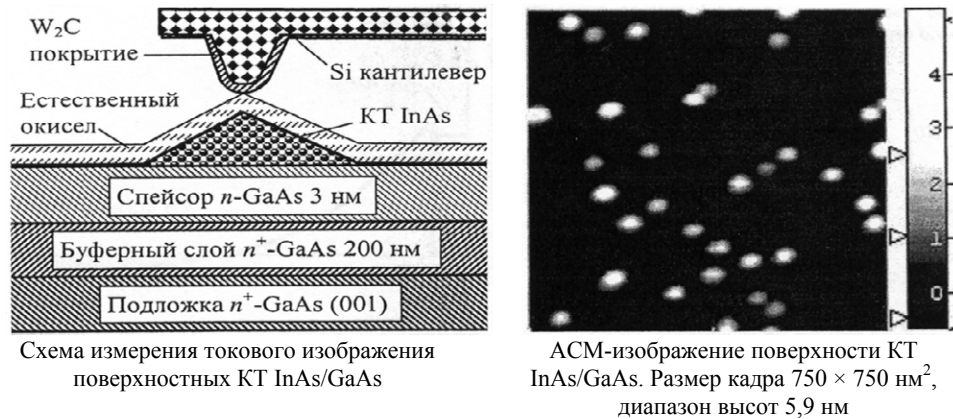


Рис. 1. Схема измерения токового изображения поверхностных КТ InAs/GaAs

Качественное сравнение модельной кривой вероятности 1D-диссипативного туннелирования (с учетом влияния двух локальных фононных мод среды-термостата) и экспериментальной ВАХ для полупроводниковых КТ из InAs/GaAs представлено на рис. 2. При этом характерный неэквидистантный спектр пиков на экспериментальных ВАХ (для полупроводниковых КТ из InAs/GaAs) и соответствующие пики на теоретической зависимости вероятности 1D-диссипативного туннелирования с учетом влияния двух локальных (промотирующих) фононных мод среды-термостата от напряженности приложенного электрического поля качественно совпадают гораздо лучше, чем это имеет место в модели, учитывающей влияние только одной локальной фононной моды.

Теоретические расчеты показали, что в зависимости вероятности 1D-диссипативного туннелирования от напряженности внешнего электрического поля при конечной температуре и фиксированных параметрах диэлектрической матрицы возможен как осциллирующий, так и неосциллирующий режим туннельного переноса (рис. 2 и 3).

Таким образом, проведенный анализ продемонстрировал качественное соответствие расчетных кривых для вероятности туннелирования с некоторыми экспериментальными ВАХ в схемах исследования управляемых характеристик проводимости отдельных полупроводниковых КТ в системах с совмещенными СТМ/АСМ.

¹ Данная статья отличается от [5, 10] более детальной систематизацией «пионерских» работ по диссипативному туннелированию, а также наличием сравнительного анализа 1D- и 2D-диссипативного туннелирования с учетом влияния двух локальных фононных мод. Мы постарались разгрузить данную статью от громоздких математических выкладок и сосредоточить основное внимание на анализе эффектов диссипативного туннелирования.

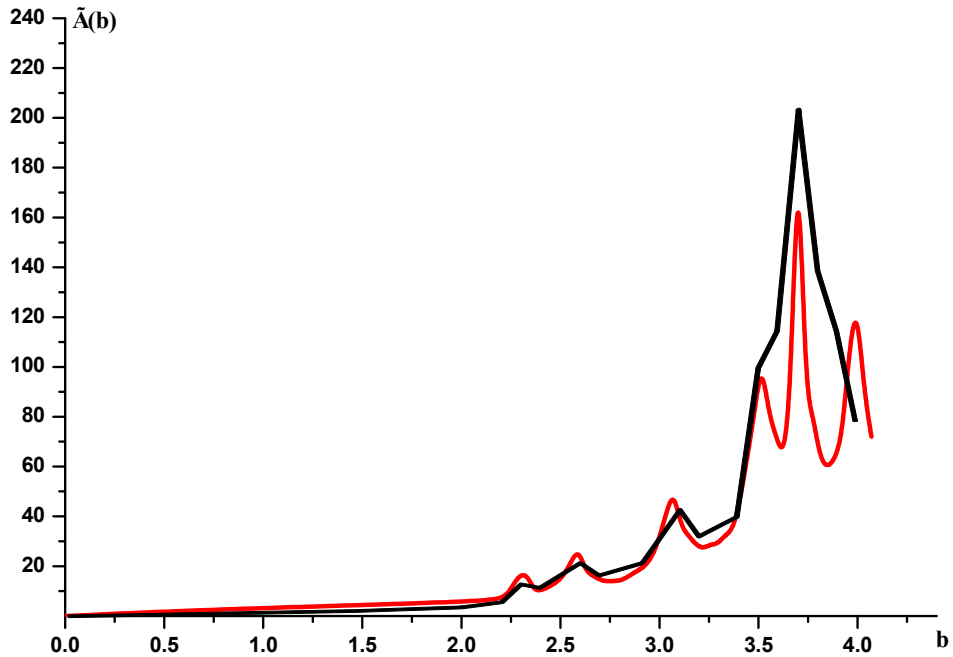


Рис. 2. Сравнение теоретических кривых (светлая линия) в модели для $\Gamma = B \exp(-S)$ с учетом влияния двух локальных мод среды-термостата с экспериментальными кривыми (темная линия)

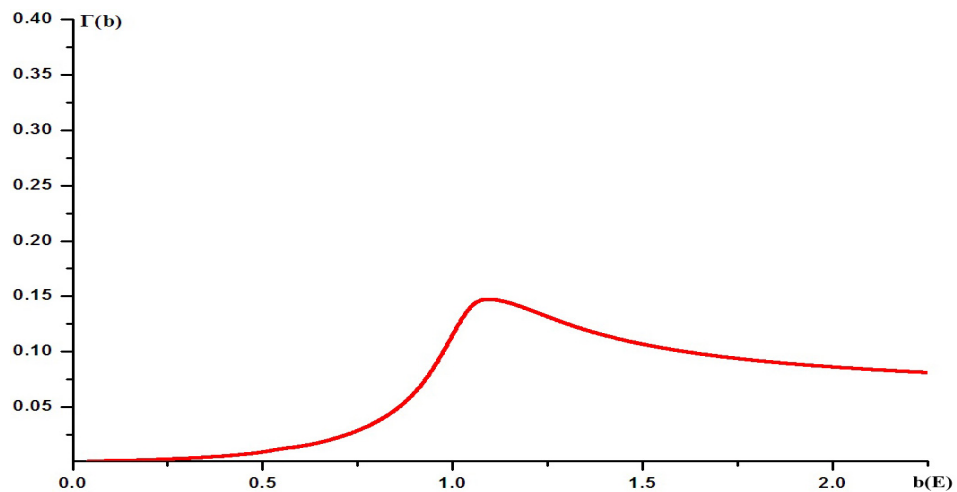


Рис. 3. Теоретическая кривая для вероятности диссипативного туннелирования в неосциллирующем режиме переноса

Эффекты 2D-диссипативного туннелирования с учетом влияния двух локальных фононных мод

Рассмотрим два одноименных заряда, которые туннелируют по параллельным координатам реакции q_1 и q_2 (например, от иглы кантилевера АСМ/СТМ в растущую золотую КТ) в двух независимых двухъямных потенциалах $U(q_1)$ и $U(q_2)$, представляемых как [1, 3]:

$$U(q_i) = \frac{1}{2} \omega^2 (q_i + a)^2 \theta(-q_i) + \left[-\Delta I + \frac{1}{2} \omega^2 (q_i - b)^2 \right] \theta(q_i), \quad i = 1, 2, \quad (10)$$

где сумма расстояний $a + b$ оценивается суммой радиуса иглы кантилевера (или наноразмерного выступа на этой игле) и радиуса золотой КТ, $\Delta I = \frac{1}{2} \omega^2 (b^2 - a^2)$ является смещением (параметром асимметрии потенциала, который линейно меняется с ростом напряженности внешнего электрического поля), $\theta(q_i)$ – ступенчатая функция, ω – частота (см. обсуждение в [1–3]). Масса частицы входит в определение q (расчеты выполнены в системе единиц, в которой масса частицы $m = \hbar = k_B = 1$).

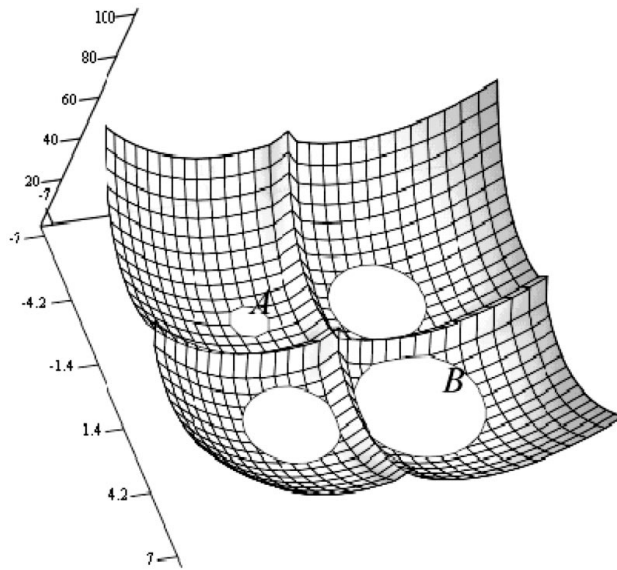


Рис. 4. Асимметричная поверхность потенциальной энергии (3) для случая параллельного туннелирования: A и B обозначают исходное и конечное состояния частиц соответственно. Минимум потенциала в B оказывается ниже, чем в A .

Два других (промежуточных) минимума оказываются ниже минимума в A и выше минимума в B

Взаимодействие между двумя электронами рассматривается в диполь-дипольном приближении [1, 3]:

$$V_{\text{int}}(q_1, q_2) = -\frac{\alpha}{2} (q_1 - q_2)^2, \quad (11)$$

где α является положительной константой. Мы используем тот же самый потенциал взаимодействия, как и в работе [3]. Нетрудно показать [3], что V_{int} может быть выбран в форме гармонического потенциала притяжения. Такой потенциал может описывать взаимодействие двух одноименно заряженных частиц, расположенных на достаточно большом расстоянии R_0 друг от друга вдоль оси x и движущихся вдоль оси y (предполагается, что $R_0 \gg a$, где

a – величина смещения частицы вдоль координаты туннелирования). В этом случае потенциал в (11) может быть представлен в виде ряда по степеням параметра $\frac{(q_{1y} - q_{2y})^2}{R_0^2}$, где q_{1y} и q_{2y} – координаты туннелирования. Для кулоновского отталкивания частиц в среде (ϵ_0 – электрическая постоянная) получим

$$V_{\text{rep}} = \frac{e^2}{\epsilon_0 \epsilon |R|} = \frac{e^2}{\epsilon_0 \epsilon [R_0^2 + (q_{1y} - q_{2y})^2]^{1/2}} \approx \frac{e^2}{\epsilon_0 \epsilon R_0} - \frac{1}{2} \times \frac{e^2}{\epsilon_0 \epsilon R_0} \times \frac{(q_{1y} - q_{2y})^2}{R_0^2}.$$

Таким образом, для коэффициента взаимодействия получим $\alpha = e^2 / (\epsilon_0 \epsilon R_0^3)$. Потенциальную энергию взаимодействия (второе слагаемое в разложении) можно интерпретировать как эффективное притягивающее взаимодействие, хотя кулоновский потенциал остается все время отталкивающим. Этот отрицательный вклад приводит к уменьшению отталкивающего потенциала. Постоянная составляющая $U(R_0) = e^2 / (\epsilon_0 \epsilon R_0)$ может быть включена в определение потенциальных энергий отдельных частиц $U(q_1)$ и $U(q_2)$.

Таким образом, полная двумерная поверхность потенциальной энергии для случая параллельного туннелирования (рис. 4), отнормированная на ω^2 , задается соотношением

$$U_p(q_1, q_2) = \frac{2\tilde{U}_p(q_1, q_2)}{\omega^2} = (q_1 + a)^2 \theta(-q_1) + \left[-(b^2 - a^2) + (q_1 - b)^2 \right] \theta(q_1) + \\ + (q_2 + a^2) \theta(-q_2) + \left[-(b^2 - a^2) + (q_2 - b)^2 \right] \theta(q_2) - \frac{\alpha^*}{2} (q_1 - q_2)^2. \quad (12)$$

Параметры a и b потенциала перенормируются во внешнем электрическом поле: $a = a^* - |e|E / \omega_0^2$; $b = b^* + |e|E / \omega_0^2$; либо перенормируется безразмерный параметр $b^* = b / a$, который слабо нелинейно зависит от напряженности внешнего электрического поля. Квазиклассическое (инстантонное) действие, которое с экспоненциальной точностью определяет вероятность 2D-диссипативного туннелирования, рассчитывается по аналогии с [3]:

$$S = 2a(a+b)(\tau_1 + \tau_2)\omega^2 - \frac{1}{\beta} \omega^2 (a+b)^2 (\tau_1 + \tau_2)^2 - \frac{\omega^4 (a+b)^2 (\tau_1 - \tau_2)^2}{(\omega^2 - 2\alpha)\beta} - \\ - \frac{2\omega^4 (a+b)^2}{\beta} \sum_{n=1}^{\infty} \left[\frac{(\sin^2 v_n \tau_1 + \sin^2 v_n \tau_2)}{v_n^2 (v_n^2 + \omega^2 + \zeta_n)} + \frac{(\sin v_n \tau_1 - \sin v_n \tau_2)^2}{v_n^2 (v_n^2 + \omega^2 - 2\alpha)} \right], \quad (13)$$

где были введены следующие обозначения: $\varepsilon = \varepsilon^* \omega = (\tau_1 - \tau_2) \omega$; $\tau = 2\tau^* \omega = (\tau_1 + \tau_2) \omega$; $\beta^* = \beta \omega / 2$; $\alpha^* = 2\alpha / \omega^2$; $b^* = b / a$, τ_1 и τ_2 – «центры» 2D-инстантона, т.е. моменты мнимого времени проскока параллельно туннелирующими частицами верхушки потенциального барьера (точки с нулевой координатой) вдоль соответствующей координаты туннелирования; $v_n = 2\pi n / \beta$ – мацубаровские частоты; $\beta = \hbar / kT$. В случае влияния двух локальных фононных мод Фурье-коэффициенты разложения мацубаровской функции Грина имеют вид

$$\zeta_n = v_n^2 \frac{C_2^2}{\omega_2^2 (\omega_2^2 + v_n^2)} + v_n^2 \frac{C_3^2}{\omega_3^2 (\omega_3^2 + v_n^2)}. \quad (14)$$

В этом случае для вычисления квазиклассического действия (13) необходимо определить выражения для следующих сумм:

$$\begin{aligned} \Sigma_1 &= \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin^2 v_n \tau_1}{v_n^2 (v_n^2 + \omega^2 + \zeta_n)}; \quad \Sigma_2 = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin^2 v_n \tau_2}{v_n^2 (v_n^2 + \omega^2 + \zeta_n)}; \\ \Sigma_3 &= \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin^2 v_n \tau_1}{v_n^2 (v_n^2 + \omega^2 - 2\alpha)}; \quad \Sigma_4 = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin^2 v_n \tau_2}{v_n^2 (v_n^2 + \omega^2 - 2\alpha)}; \\ \Sigma_5 &= - \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\cos v_n (\tau_1 - \tau_2)}{v_n^2 (v_n^2 + \omega^2 - 2\alpha)}; \quad \Sigma_6 = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\cos v_n (\tau_1 + \tau_2)}{v_n^2 (v_n^2 + \omega^2 - 2\alpha)}. \end{aligned}$$

Эти суммы возникают, когда мы приходим к обезразмеренному выражению для 2D-квазиклассического действия:

$$\begin{aligned} S &= 2a^2 \left(\frac{b}{a} + 1 \right) \tau \omega - \frac{2\omega^3}{2\beta\omega} a^2 \left(\frac{b}{a} + 1 \right)^2 \frac{(\tau_1 + \tau_2)^2 \omega^2}{\omega^2} - \\ &- \frac{\omega^4 \cdot \omega a^2 \left(\frac{b}{a} + 1 \right)^2 (\tau_1 + \tau_2)^2 \omega^2 \cdot 2}{2\omega^2 (1 - \alpha^*) \beta \omega \cdot \omega^2} = 2a^2 \omega (b^* + 1) \tau - \\ &- \frac{a^2 \omega (b^* + 1)^2 \tau^2}{2\beta^*} - \frac{a^2 \omega (b^* + 1)^2 \varepsilon^2}{2(1 - \alpha^*) \beta^*} = - \frac{a^2 \omega \cdot \omega^4 (b^* + 1)^2}{\beta^*} - \frac{2\omega^4 a^2 \left(\frac{b}{a} + 1 \right)^2 \cdot \omega}{\beta \omega} \cdot \Sigma; \\ S^* &= \frac{S}{a^2 \omega} = 2(b^* + 1) \tau - \frac{(b^* + 1)^2 \tau^2}{2\beta^*} - \frac{(b^* + 1)^2 \varepsilon^2}{2(1 - \alpha^*) \beta^*} - \frac{\omega^4 (b^* + 1)^2}{\beta^*} \cdot \Sigma, \quad (15) \end{aligned}$$

где $\Sigma = \Sigma_1 + \Sigma_2 + \Sigma_3 + \Sigma_4 + \Sigma_5 + \Sigma_6$.

Результаты расчета этих сумм, 2D-квазиклассического действия и предэкспоненциального фактора в режиме синхронного переноса для вероятности 2D-диссипативного туннелирования $\Gamma = B \exp(-S^*)$ представлены в приложении Б. Решение системы трансцендентных уравнений для моментов времени проскока параллельно туннелирующими частицами вершины барьера вдоль соответствующей координаты реакции позволяет выявить режим 2D-бифуркаций, а также квантовых биений в окрестности точки бифуркации.

В режиме синхронного параллельного переноса туннелирующих частиц с иглы кантилевера в растущую КТ наличие двух локальных фононных мод приводит к появлению двух устойчивых пиков на полевой зависимости вероятности 2D-диссипативного туннелирования, построенной с помощью формул (15) (рис. 5).

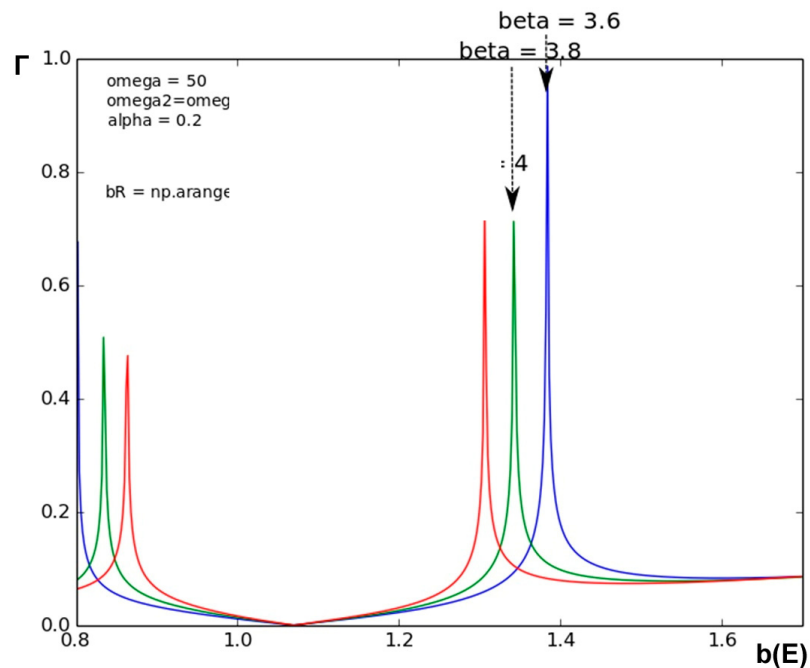


Рис. 5. Полевая зависимость вероятности 2D-параллельного синхронного диссипативного туннелирования с учетом влияния двух локальных фононных мод в случае, когда частота модельного осцилляторного потенциала в 5 раз превосходила частоты локальных фононных мод

Из рис. 5 видно, что расстояние между пиками зависит от температуры и возрастает с ростом температуры. Минимум между двумя пиками соответствует случаю симметричного двухъямного модельного потенциала и отвечает режиму блокировки туннелирования при существенном влиянии двух локальных фононных мод. Если взаимодействие с локальными фононными модами «выключить», то вместо блокировки туннелирования для симметричного двухъямного потенциала будет иметь место единичный пик на кривой вероятности туннелирования при одной из полярностей внешнего электрического поля. Минимум отвечает малому, но ненулевому значению вероятности туннелирования (рис. 6).

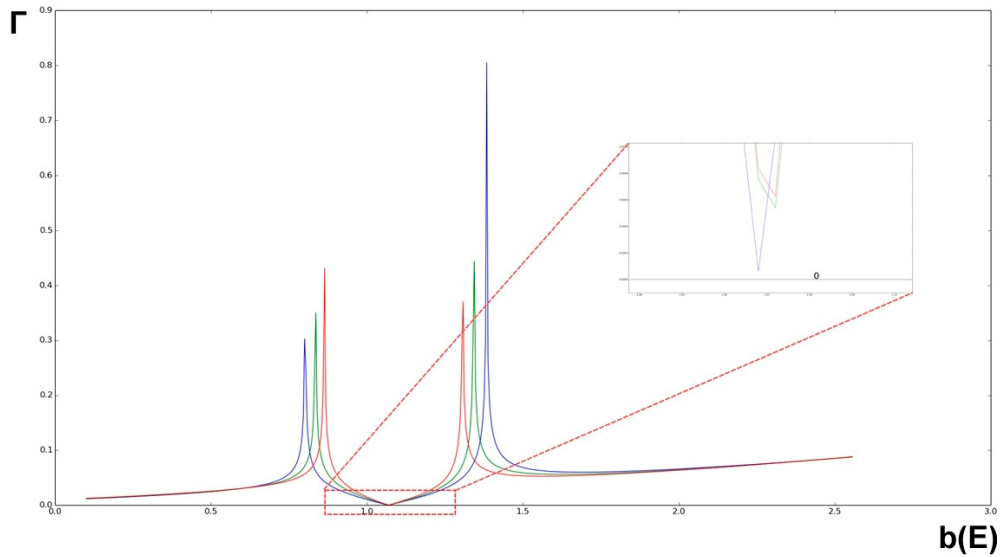


Рис. 6. Режим блокировки 2D-параллельного синхронного диссипативного туннелирования

Рисунок 7 показывает, что изменение параметра взаимодействия α^* туннелирующих частиц слабо влияет на вероятность 2D-параллельного синхронного диссипативного туннелирования.

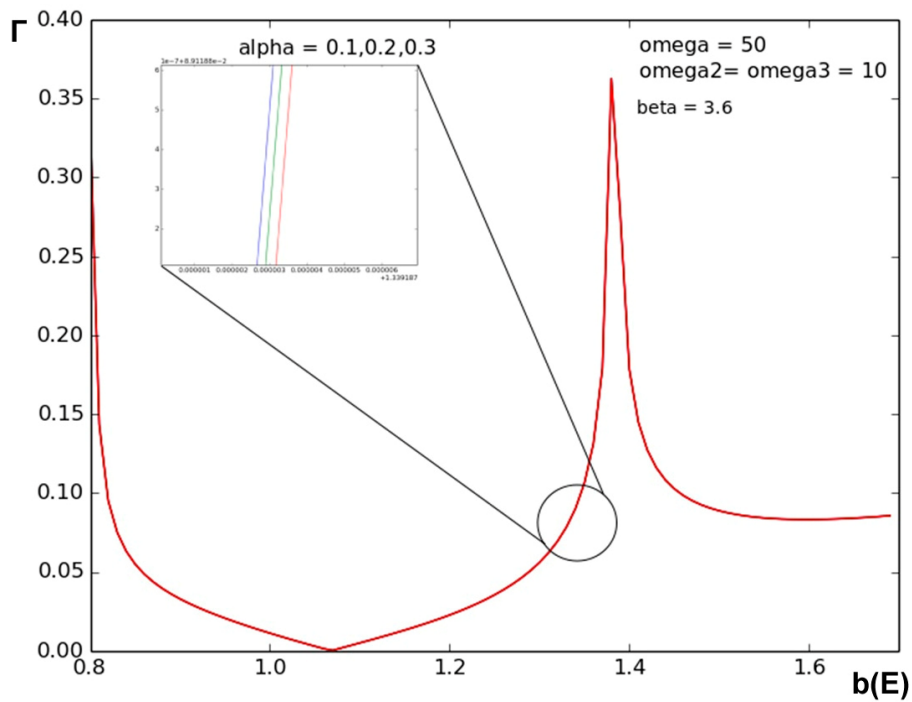


Рис. 7. Влияние параметра взаимодействия параллельно туннелирующих частиц в синхронном режиме переноса на вероятность 2D-параллельного синхронного диссипативного туннелирования

Соотношение между высотами левого и правого пиков на полевой зависимости вероятности 2D-параллельного синхронного диссипативного туннелирования зависит от соотношения частот локальных фононных мод и частоты двухъямного осцилляторного потенциала вдоль параллельных координат туннелирования (см. рис. 5 и рис. 8). На рис. 5 высоты правых пиков выше, чем левых, а на рис. 8 имеет место обратная ситуация. При этом для случая, представленного на рис. 5, частота модельного потенциала выбиралась в 5 раз больше частот локальных фононных мод, а для рис. 8 эти частоты были сравнимыми.

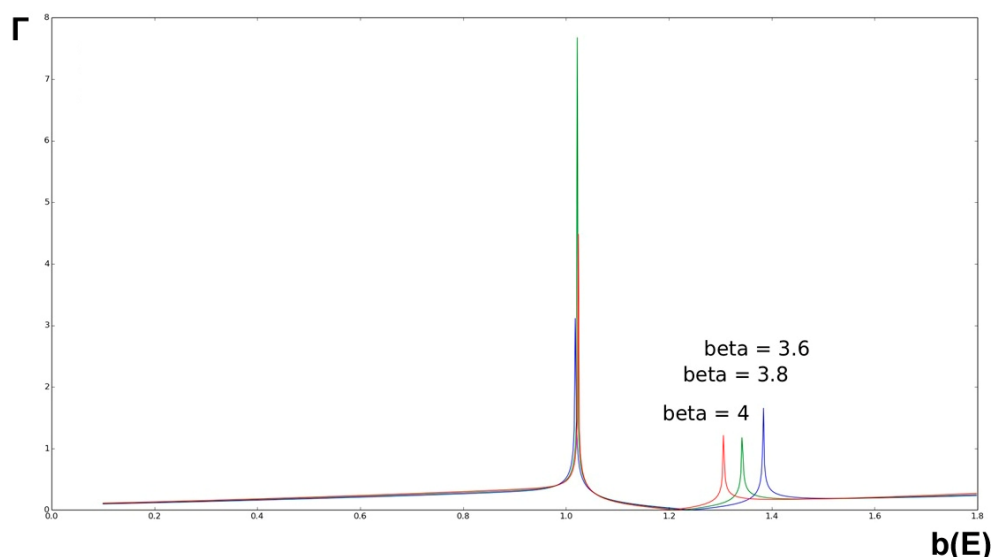


Рис. 8. Полевая зависимость вероятности 2D-параллельного синхронного диссипативного туннелирования в случае, когда частота модельного осцилляторного потенциала в 1,1 раза превосходила частоты локальных фононных мод

Проведем качественное сравнение полученной теоретической кривой вероятности 2D-параллельного синхронного диссипативного туннелирования с экспериментальной туннельной ВАХ для растущих КТ из коллоидного золота под иглой кантилевера на начальном этапе формирования, когда размер КТ не превышает 10 нм. Результат этого качественного сравнения представлен на рис. 9. Видно, что два пика теоретической кривой для режима синхронного 2D-туннельного переноса соответствуют двум близким пикам на экспериментальной туннельной ВАХ для растущей золотой КТ, отвечающим двум локальным фононным модам.

Из рис. 10 видно, что на теоретической кривой температурной зависимости вероятности 2D-диссипативного туннелирования один из двух устойчивых пиков, соответствующих взаимодействию туннелирующих частиц с двумя локальными фононными модами, может расщепляться на два, что, по-видимому, связано с механизмом интерференции каналов туннелирования (один из возможных вариантов механизма Фано) [11].

Полученная полевая зависимость вероятности 2D-диссипативного туннелирования с учетом влияния двух локальных фононных мод позволяет проанализировать режим 2D-туннельных бифуркаций (смена режима туннелиро-

вания с синхронного на асинхронный), а также квантовых биений в окрестности точки бифуркации. Так, на рис. 11 после режима синхронного параллельного туннельного переноса с двумя характерными пиками точка излома отвечает точке бифуркации, а последующие осцилляции – квантовым биениям.

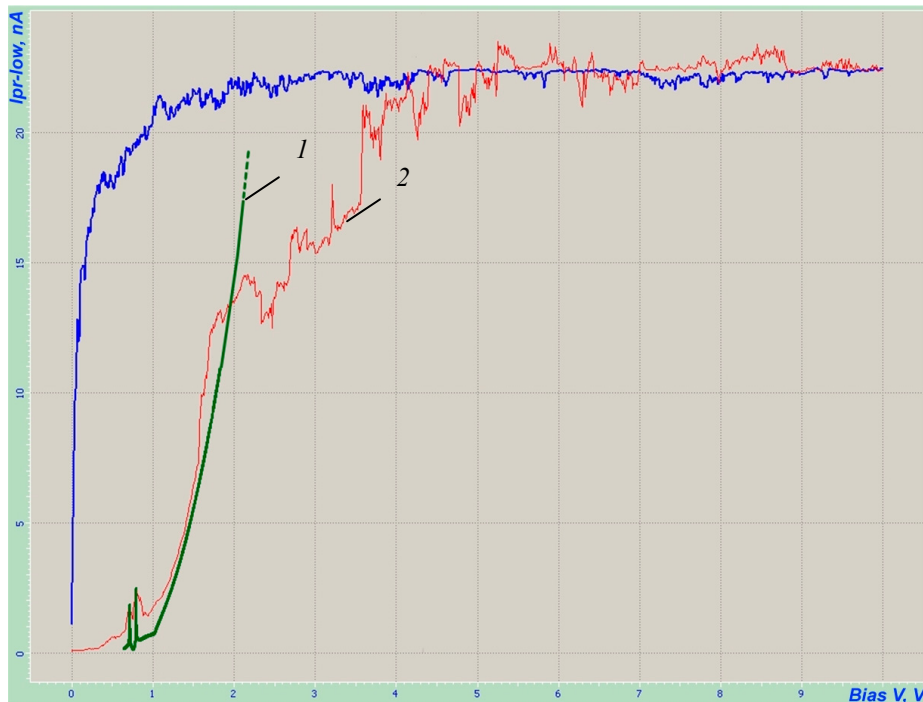


Рис. 9. Сравнение теоретической кривой (кривая 1) полевой зависимости вероятности 2D-параллельного синхронного диссипативного туннелирования с экспериментальной туннельной ВАХ (кривая 2) для растущих КТ из коллоидного золота под иглой кантилевера на начальном этапе формирования, когда размер КТ не превышает 10 нм

Теоретически выявленный режим квантовых биений на полевой зависимости вероятности 2D-диссипативного туннелирования можно качественно сравнить с экспериментальной туннельной ВАХ для растущей КТ из коллоидного золота на начальном этапе ее формирования. Это качественное сравнение приведено на рис. 12.

Помимо режима квантовых биений с «провалами» на полевой зависимости вероятности 2D-диссипативного туннелирования (рис. 11 и 12), встречается режим квантовых биений с «резонансной» структурой (рис. 13).

Подобные режимы квантовых биений напоминают особенности туннельной проводимости для полупроводниковых наноструктур с примесными атомами – типа резонансов Фано, возникающих из-за интерференции между резонансным и нерезонансным каналами туннелирования. Такие эффекты были описаны в докторской диссертации В. Н. Манцевича [11]. При этом было показано, что в случае, когда величина приложенного напряжения совпадает с энергией уровня примесного атома, в локальной туннельной проводимости, измеренной на конечном расстоянии от примеси, может наблюдаться не только провал, но и пик.

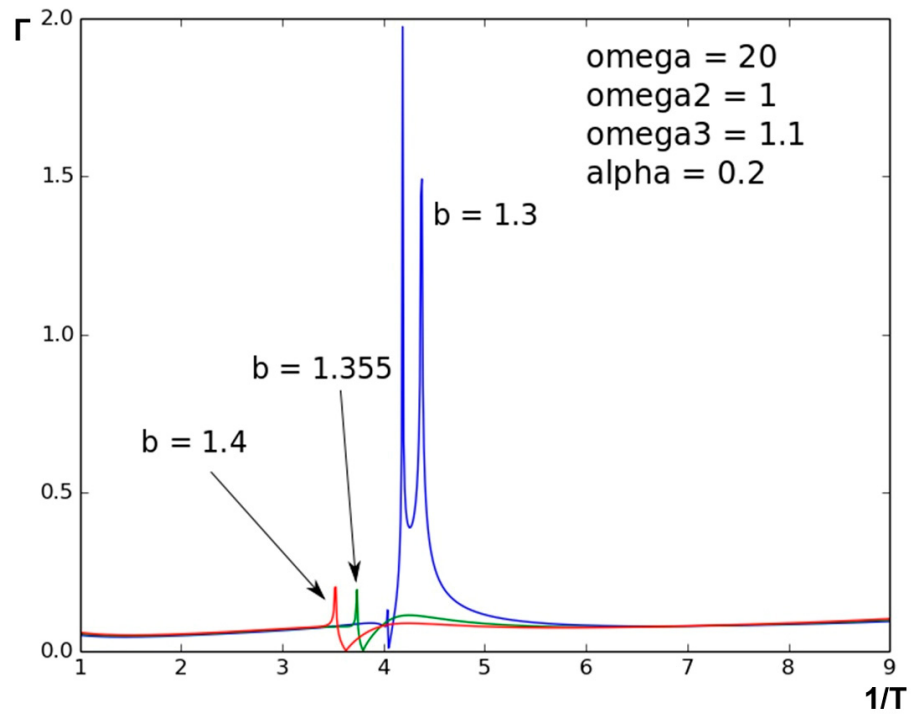


Рис. 10. Температурная зависимость вероятности 2D-диссипативного туннелирования

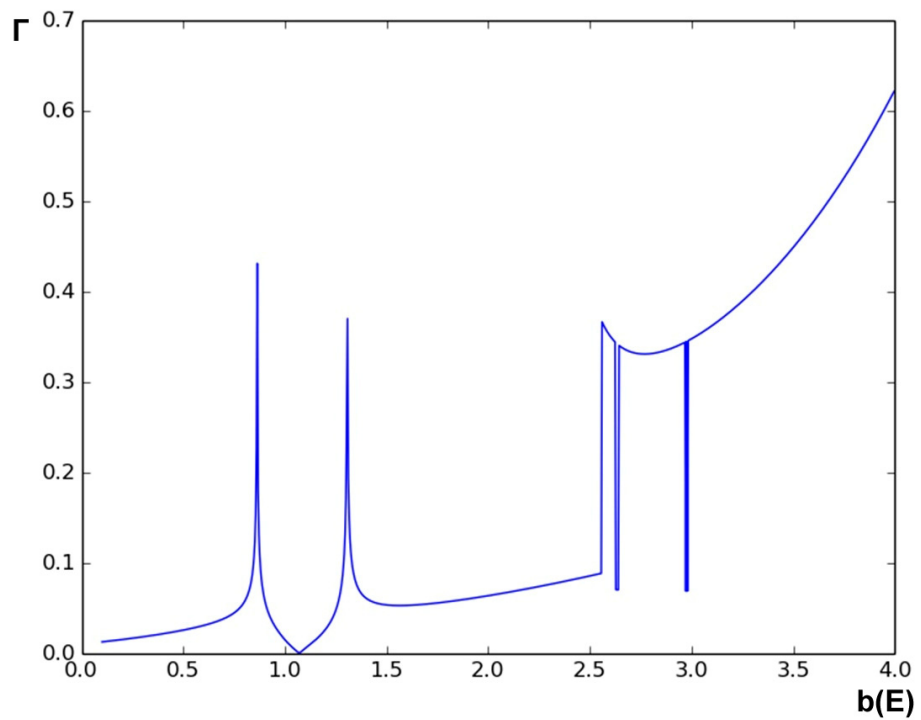


Рис. 11. Полевая зависимость вероятности 2D-диссипативного туннелирования с учетом точки бифуркации и режима квантовых биений

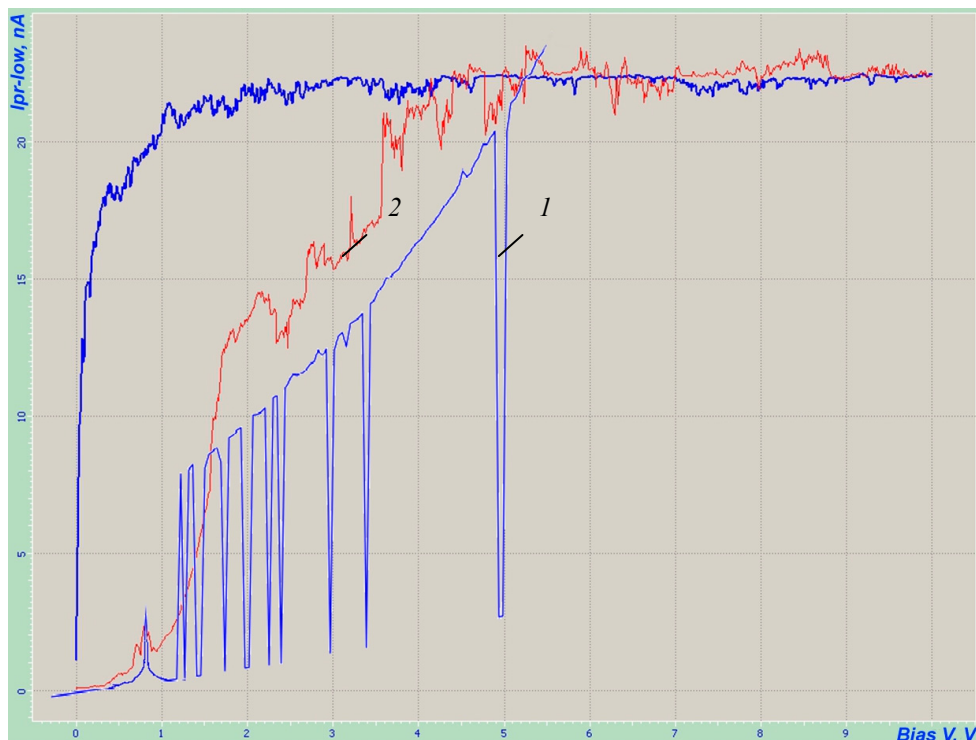


Рис. 12. Качественное сравнение теоретически предсказанного режима квантовых биений на полевой зависимости вероятности 2D-диссипативного туннелирования (кривая 1) с экспериментальной туннельной ВАХ (кривая 2) для растущей КТ из коллоидного золота на начальном этапе ее формирования (когда размер КТ не превышает 10 нм)

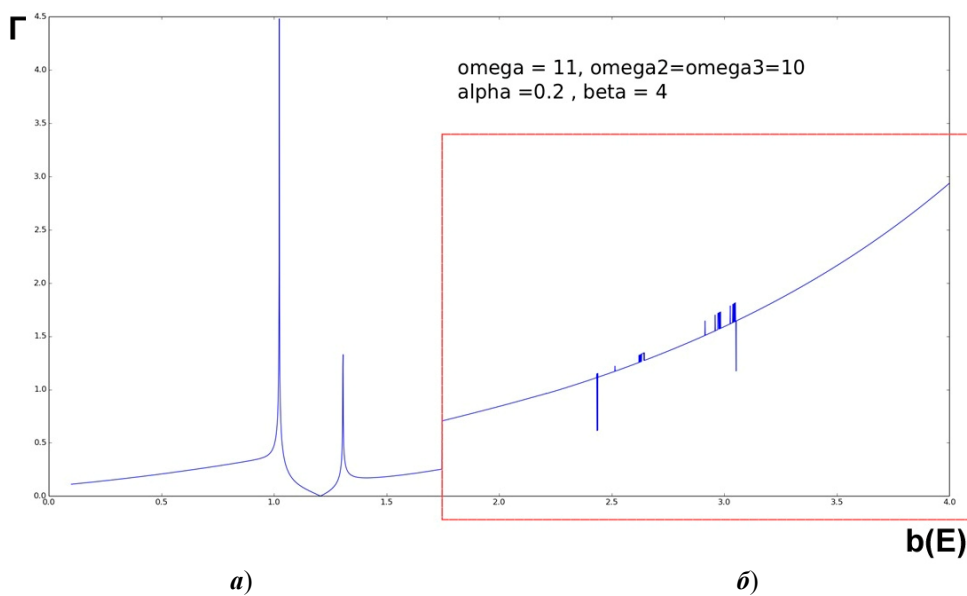


Рис. 13. Режим квантовых биений на полевой зависимости вероятности 2D-диссипативного туннелирования: *a* – «резонансы» до точки бифуркации; *б* – «резонансы» и «провалы» выше точки бифуркации

Заключение

В заключении приводим сравнительный анализ эффектов 1D- и 2D-диссипативного туннелирования, часть из которых удалось экспериментально наблюдать.

Без учета влияния локальных фононных мод (1D-эффекты) теоретически предсказан и экспериментально обнаружен единичный пик на туннельной ВАХ для КТ из циркония и коллоидного золота (также для отдельных ВАХ одномолекулярных транзисторов) при одной из полярностей внешнего приложенного напряжения между иглой кантилевера смещенного АСМ/СТМ и проводящей подложкой, на которой находится матрица с КТ.

С учетом влияния одной локальной фононной моды (1D-эффекты) теоретически выявлен неустойчивый единичный пик на полевой зависимости вероятности 1D-диссипативного туннелирования при одной из полярностей внешнего напряжения, когда модельный двухъямный осцилляторный потенциал становится симметричным. Также появляется дополнительный устойчивый единичный пик, отвечающий взаимодействию туннелирующей частицы с одной промотирующей локальной фононной модой.

С учетом влияния двух локальных фононных мод (1D-эффекты) теоретически предсказан и экспериментально выявлен осциллирующий режим 1D-диссипативного туннелирования для случая отдельных экспериментальных туннельных вольт-амперных характеристик для квантовых точек InAs/GaAs с неэквидистантными и немонотонными по амплитуде характерными пиками.

Без учета влияния локальных фононных мод (2D-эффекты) теоретически предсказан и экспериментально выявлен излом на полевой зависимости вероятности 2D-параллельного диссипативного туннелирования, отвечающий режиму 2D-бифуркаций для КТ из коллоидного золота размером до 5 нм под платинированной иглой кантилевера, радиусом около 40 нм с наноразмерными выступами, смещенного АСМ/СТМ. Вблизи точки бифуркации экспериментально наблюдается режим предсказанных теоретически квантовых биений для отдельных туннельных ВАХ с малой переходной областью вблизи точки бифуркации с характерным дополнительным минимумом.

С учетом влияния одной локальной фононной моды (2D-эффекты) теоретически предсказан эффект 2D-бифуркаций и квантовых биений на полевой зависимости коэффициента двухфотонного примесного поглощения для квантовой молекулы в условиях внешнего электрического поля. Планируется экспериментальная проверка предсказанного эффекта.

С учетом влияния двух локальных фононных мод (2D-эффекты) теоретически предсказан эффект 2D-бифуркаций и квантовых биений двух типов (осцилляции и «квантовая гребенка») на туннельных ВАХ (проведено качественное сравнение с имеющимся экспериментом для растущих КТ из коллоидного золота на начальном этапе их формирования, когда размер КТ не превышает 10 нм), а также на полевой зависимости коэффициента двухфотонного примесного поглощения для квантовой молекулы в условиях внешнего электрического поля. Необходима экспериментальная проверка.

В результате проведенного анализа можно сделать вывод о том, что развитая теория диссипативного туннелирования с учетом влияния двух ло-

кальных фоонных мод позволила качественно объяснить экспериментальные туннельные ВАХ для полупроводниковых КТ InAs и предсказать ряд двумерных нелинейных эффектов (2D-бифуркаций и квантовых биений) для систем с полупроводниковыми квантовыми молекулами. С другой стороны, выявлена возможность эффективного управления вероятностями 1D- и 2D-диссипативного туннелирования посредством вариации внешнего электрического поля, что имеет важное значение для приборных приложений.

Список литературы

1. Управляемое диссипативное туннелирование. Туннельный транспорт в низкоразмерных системах / под ред. Э. Дж. Леггета ; при ред. участии В. Д. Кревчика, М. Б. Семенова, Ю. Н. Овчинникова, А. А. Бухараева, Ю. И. Дахновского, В. Ч. Жуковского, Х. Деккера, К. Ямамото, А. К. Арынгазина, А. И. Тернова. – М., 2011, 2012.
2. **Дахновский, Ю. И.** Низкотемпературные химические реакции как туннельные системы с диссипацией / Ю. И. Дахновский, А. А. Овчинников, М. Б. Семенов // Журнал экспериментальной и теоретической физики. – 1987. – Т. 92, № 3. – С. 955–967.
3. Two dimensional tunnel correlations with dissipation / A. K. Aryngazin, Yu. Dahnovsky, V. D. Krevchik, M. B. Semenov, A. A. Ovchinnikov, K. Yamamoto // Phys. Rev. B. – 2003. – Vol. 68. – P. 155426.
4. Особенности туннельных ВАХ в системе совмещенного АСМ/СТМ с квантовыми точками из коллоидного золота / В. Ч. Жуковский, В. Д. Кревчик, М. Б. Семенов, Д. О. Филатов, Р. В. Зайцев, П. В. Кревчик, И. А. Егоров, В. А. Васильев // Вестник Московского университета. Сер. 3. Физика. Астрономия. – 2015. – № 4. – С. 54–59.
5. Влияние локальных фоонных мод широкозонной матрицы из туннельных ВАХ квазиуменьшенных структур / В. Ч. Жуковский, В. Д. Кревчик, М. Б. Семенов, Д. О. Филатов, Р. В. Зайцев, П. В. Кревчик, А. А. Бухараев // Вестник Московского университета. Сер. 3. Физика. Астрономия. – 2014. – № 4. – С. 65–71.
6. Наблюдаемые двумерные туннельные бифуркации во внешнем электрическом поле / В. Ч. Жуковский, Ю. И. Дахновский, О. Н. Горшков, В. Д. Кревчик, М. Б. Семенов, Ю. Г. Смирнов, Е. В. Чупрунов, В. А. Рудин, Н. Ю. Скибицкая, П. В. Кревчик, Д. О. Филатов, Д. А. Антонов, М. А. Лапшина, К. Ямамото, М. Е. Шенина // Вестник Московского университета. Сер. 3. Физика. Астрономия. – 2009. – № 5. – С. 3–8.
7. Изучение управляемого туннелирования в структурах типа «квантовая точка – квантовая яма» или «квантовая молекула» / В. Ч. Жуковский, Ю. И. Дахновский, В. Д. Кревчик, М. Б. Семенов, В. Г. Майоров, Е. И. Кудряшов, К. Ямамото // Вестник Московского университета. Сер. 3. Физика. Астрономия. – 2006. – № 3. – С. 24–27.
8. Управляемое диссипативное туннелирование во внешнем электрическом поле / В. Ч. Жуковский, О. Н. Горшков, В. Д. Кревчик, М. Б. Семенов, Е. В. Грозная, Д. О. Филатов, Д. А. Антонов // Вестник Московского университета. Сер. 3. Физика. Астрономия. – 2009. – № 3. – С. 27–31.
9. Изучение управляемого диссипативного туннелирования в системах взаимодействующих квантовых молекул / В. Ч. Жуковский, Ю. И. Дахновский, В. Д. Кревчик, М. Б. Семенов, В. Г. Майоров, Е. И. Кудряшов, Е. В. Щербакова, К. Ямамото // Вестник Московского университета. Сер. 3. Физика. Астрономия. – 2007. – № 2. – С. 10–14.
10. Эффекты двумерных бифуркаций и квантовых биений в системе совмещенного атомного силового и сканирующего туннельного микроскопа с квантовыми точ-

- ками / Жуковский В. Ч., Кревчик В. Д., Семенов М. Б., Кревчик П. В. и др. // Вестник Московского государственного университета. Сер. 3. Физика и астрономия. – 2016. – № 5.
11. Объединенная СТМ/АСМ – визуализация локальной плотности состояний в InAs/GaAs квантовых точках / П. А. Бородин, А. А. Бухараев, Д. О. Филатов, Д. А. Воронцов, М. А. Лапшина // Поверхность: рентгеновские, синхротронные и нейтронные исследования. – 2009. – Т. 3, № 5. – С. 721–724.
12. **Манцевич, В. Н.** Неравновесные эффекты и нестационарный электронный транспорт в полупроводниковых наноструктурах с межчастичным взаимодействием : дис. ... д-ра физ.-мат. наук : 01.04.10 «Физика полупроводников» / Манцевич В. Н. – М. : Физический факультет МГУ им. М. В. Ломоносова, 2014. – 337 с.

References

1. *Upravlyаемое dissipativnoe tunnelirovanie. Tunnel'nyy transport v nizkorazmernyykh sistemakh* [Controllable dissipative tunneling. Tunnel transport in low-dimensional systems]. Eds. E. Dzh. Legget, V. D. Krevchik, M. B. Semenov, Yu. N. Ovchinnikov, A. A. Bukharaev, Yu. I. Dakhnovskiy, V. Ch. Zhukovskiy, Kh. Dekker, K. Yamamoto, A. K. Aryngazin, A. I. Ternov. Moscow, 2011, 2012.
2. Dakhnovskiy Yu. I., Ovchinnikov A. A., Semenov M. B. *ZhETF*. 1987, vol. 92, iss. 3, pp. 955–967.
3. Aryngazin A. K., Dakhnovskiy Yu., Krevchik V. D., Semenov M. B., Ovchinnikov A. A., Yamamoto K. *Phys. Rev. B*. 2003, vol. 68, p. 155426.
4. Zhukovskiy V. Ch., Krevchik V. D., Semenov M. B., Filatov D. O., Zaytsev R. V., Krevchik P. V., Egorov I. A., Vasil'ev V. A. *Vestnik Moskovskogo universiteta. Seriya 3. Fizika. Astronomiya* [Bulletin of Moscow University. Series 3. Physics, Astronomy]. 2015, no. 4, pp. 54–59.
5. Zhukovskiy V. Ch., Krevchik V. D., Semenov M. B., Filatov D. O., Zaytsev R. V., Krevchik P. V., Bukharaev A. A. *Vestnik Moskovskogo universiteta. Seriya 3. Fizika. Astronomiya* [Bulletin of Moscow University. Series 3. Physics, Astronomy]. 2014, no. 4, pp. 65–71.
6. Zhukovskiy V. Ch., Dakhnovskiy Yu. I., Gorshkov O. N., Krevchik V. D., Semenov M. B., Smirnov Yu. G., Chuprunov E. V., Rudin V. A., Skibitskaya N. Yu., Krevchik P. V., Filatov D. O., Antonov D. A., Lapshina M. A., Yamamoto K., Shenina M. E. *Vestnik Moskovskogo universiteta. Seriya 3. Fizika. Astronomiya* [Bulletin of Moscow University. Series 3. Physics, Astronomy]. 2009, no. 5, pp. 3–8.
7. Zhukovskiy V. Ch., Dakhnovskiy Yu. I., Krevchik V. D., Semenov M. B., Mayorov V. G., Kudryashov E. I., Yamamoto K. *Vestnik Moskovskogo universiteta. Seriya 3. Fizika. Astronomiya* [Bulletin of Moscow University. Series 3. Physics, Astronomy]. 2006, no. 3, pp. 24–27.
8. Zhukovskiy V. Ch., Gorshkov O. N., Krevchik V. D., Semenov M. B., Groznaya E. V., Filatov D. O., Antonov D. A. *Vestnik Moskovskogo universiteta. Seriya 3. Fizika. Astronomiya* [Bulletin of Moscow University. Series 3. Physics, Astronomy]. 2009, no. 3, pp. 27–31.
9. Zhukovskiy V. Ch., Dakhnovskiy Yu. I., Krevchik V. D., Semenov M. B., Mayorov V. G., Kudryashov E. I., Shcherbakova E. V., Yamamoto K. *Vestnik Moskovskogo universiteta. Seriya 3. Fizika. Astronomiya* [Bulletin of Moscow University. Series 3. Physics, Astronomy]. 2007, no. 2, pp. 10–14.
10. V.Ch. Zhukovskiy, V.D. Krevchik, M.B. Semenov, P.V. Krevchik i dr. *Vestnik MGU. Seriya 3. Fizika i astronomiya* [Bulletin of Moscow University. Series 3. Physics, Astronomy]. 2016, no. 5.
11. Borodin P. A., Bukharaev A. A., Filatov D. O., Vorontsov D. A., Lapshina M. A. *Poverkhnost': rentgenovskie, sinkhrotronnye i neytronnye issledovaniya* [Surface: x-ray, synchronous and neutron research]. 2009, vol. 3, no. 5, pp. 721–724.

12. Mantsevich V. N. *Neravnovesnye efekty i nestatsionarnyy elektronnyy transport v poluprovodnikovyykh nanostrukturakh s mezhchastichnym vzaimodeystviem: dis. d-ra fiz.-mat. nauk: 01.04.10 «fizika poluprovodnikov»* [Non-equilibrium effect and non-stationary electron transport in semiconductor nanostructures with interparticle interaction: dissertation to apply for the degree of the doctor of physical and mathematical sciences]. Moscow: Fizicheskiy fakul'tet MGU im. M. V. Lomonosova, 2014, 337 s.

Приложение А

Приведен вывод формулы для вероятности 1D-диссипативного туннелирования с точностью до предэкспоненциального фактора. Квазиклассическое действие (3) в случае влияния двух промотирующих фононных мод сводится к вычислению сумм двух видов в последнем слагаемом выражения (3):

$$U_1 = \frac{1}{2} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{v_n^2 \left(v_n^2 + \omega_0^2 + v_n^2 \frac{C_2^2}{\omega_2^2(\omega_2^2 + v_n^2)} v_n^2 + \frac{C_3^2}{\omega_3^2(\omega_3^2 + v_n^2)} \right)},$$

$$U_2 = \frac{1}{2} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\cos 2v_n \tau_0}{v_n^2 \left(v_n^2 + \omega_0^2 + v_n^2 \frac{C_2^2}{\omega_2^2(\omega_2^2 + v_n^2)} v_n^2 + \frac{C_3^2}{\omega_3^2(\omega_3^2 + v_n^2)} \right)}. \quad (\text{П1})$$

Обозначим $v_n^2 = x$ и введем обозначения:

$$A = \omega_2^2 + \omega_3^2 + \omega_0^2 + \frac{C_2^2}{\omega_2^2} + \frac{C_3^2}{\omega_3^2},$$

$$B_\omega = \omega_2^2 \omega_3^2 + \omega_0^2(\omega_2^2 + \omega_3^2) + \frac{C_2^2 \omega_3^2}{\omega_2^2} + \frac{C_3^2 \omega_2^2}{\omega_3^2}, \quad C = \omega_0^2 \omega_2^2 \omega_3^2,$$

тогда выражение в знаменателе U_1 примет вид

$$x \omega_2^2 \omega_3^2 [x^3 + Ax^2 + B_\omega x + C] = x \omega_2^2 \omega_3^2 (x - x_1)(x - x_2)(x - x_3).$$

Обозначим

$$Q = \frac{A^2 - 3B_\omega}{9}; \quad R = \frac{2A^3 - 9AB_\omega + 27C}{54};$$

$$S = Q^3 - R^2; \quad \Phi = \frac{1}{3} \arccos \left(\frac{R}{\sqrt{Q^3}} \right).$$

Если $S > 0$, тогда

$$x_1 = -2\sqrt{Q} \cos(\Phi) - \frac{A}{3},$$

$$x_2 = -2\sqrt{Q} \cos\left(\Phi + \frac{2}{3}\pi\right) - \frac{A}{3}, \quad x_3 = -2\sqrt{Q} \cos\left(\Phi - \frac{2}{3}\pi\right) - \frac{A}{3}. \quad (\text{П2})$$

И первая сумма в (П1) принимает вид

$$U_1 = \frac{1}{2} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\omega_2^2 \omega_3^2 (\omega_2^2 + v_n^2)(\omega_3^2 + v_n^2)}{v_n^2 \omega_2^2 \omega_3^2 (v_n^2 - x_1)(v_n^2 - x_2)(v_n^2 - x_3)}. \quad (\text{П3})$$

При разбиении последнего выражения на простые дроби обозначим

$$\frac{\beta_0}{x} + \frac{\gamma}{x - x_1} + \frac{\varphi}{x - x_2} + \frac{\Delta}{x - x_3} = \frac{x^2 + x(\omega_2^2 + \omega_3^2) + \omega_2^2 \omega_3^2}{x(x - x_1)(x - x_2)(x - x_3)},$$

где

$$\begin{aligned} \beta_0 &= -\frac{\omega_2^2 \omega_3^2}{x_1 x_2 x_3}, \\ \Delta &= \frac{x_3^2}{(x_3 - x_2)(x_1 - x_3)} \left\{ \frac{\omega_2^2 \omega_3^2}{x_1 x_2 x_3} \left(\frac{x_1 x_2 + x_1 x_3 + x_2 x_3}{x_2 x_3} - 1 \right) + \frac{\omega_2^2 + \omega_3^2}{x_2 x_3} - \right. \\ &\quad \left. - \frac{1}{x_3} \left(1 + \frac{\omega_2^2 \omega_3^2}{x_1 x_2 x_3} \left[\frac{x_1 x_2 + x_1 x_3 + x_2 x_3}{x_2 x_3} + (x_2 + x_3 - x_1) \right] \right) + \frac{(\omega_2^2 + \omega_3^2)(x_2 + x_3)}{x_2 x_3} \right\}, \\ \varphi &= \frac{x_2}{x_3(x_2 - x_1)} \left\{ \Delta \frac{x_2}{x_3} (x_1 - x_3) - 1 - \frac{\omega_2^2 \omega_3^2}{x_1 x_2 x_3} (x_2 + x_3 - x_1) - \right. \\ &\quad \left. - \frac{x_2 + x_3}{x_2 x_3} \left\{ \omega_2^2 + \omega_3^2 + \frac{\omega_2^2 \omega_3^2}{x_1 x_2 x_3} (x_1 x_2 + x_1 x_3 + x_2 x_3) \right\} \right\} \\ \gamma &= \frac{1}{x_2 x_3} \left\{ \omega_2^2 + \omega_3^2 - \Delta x_1 x_2 - \varphi x_1 x_3 - \beta_0 (x_2 x_3 + x_1 (x_2 + x_3)) \right\}, \quad v_n = \frac{2\pi n}{\beta}. \quad (\text{П4}) \end{aligned}$$

В итоге U_1 преобразуется к виду

$$\begin{aligned} U_1 &= \frac{1}{2} \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{\beta_0}{v_n^2} + \frac{\gamma}{v_n^2 - x_1} + \frac{\varphi}{v_n^2 - x_2} + \frac{\Delta}{v_n^2 - x_3} \right). \\ x_1 &= -2\sqrt{Q} \cos \varphi - \frac{A}{3} = -x_{10} = -\left(2\sqrt{Q} \cos \varphi + \frac{A}{3} \right), \\ x_2 &= -2\sqrt{Q} \cos \left(\Phi + \frac{2}{3} \pi \right) - \frac{A}{3} = -x_{20}, \quad \tilde{x}_{20}^2 = \frac{x_{20} \beta^2}{4\pi^2}, \\ x_3 &= -2\sqrt{Q} \cos \left(\Phi - \frac{2}{3} \pi \right) - \frac{A}{3} = -x_{30}, \quad \tilde{x}_{30}^2 = \frac{x_{30} \beta^2}{4\pi^2}. \end{aligned}$$

Если $x_1 > 0$, $x_2 > 0$, $x_3 > 0$, то квазиклассическое действие с учетом двух промотирующих мод сводится к выражению вида

$$S_B = 2\omega_0^2(a+b)a\tau_0 - \frac{2}{\beta}\omega_0^2(a+b)^2\tau_0^2 - \frac{4}{\beta}\omega_0^4(a+b)^2\{U_1 + U_2\},$$

где

$$\tau_0 = \frac{1}{2\omega_0} \operatorname{Arcsh} \left[\frac{b-a}{b+a} \operatorname{sh} \frac{\omega_0 \beta}{4} \right] + \frac{\beta}{4} = \frac{1}{2\omega_0} \operatorname{Arcsh} \left[\frac{\frac{b}{a}-1}{\frac{b}{a}+1} \operatorname{sh} \frac{\omega_0 \beta}{4} \right] + \frac{\beta}{4},$$

или

$$\tau_0^* = \tau_0 \omega_0 = \frac{1}{2} \operatorname{Arcsh} \left[\frac{b^*-1}{b^*+1} \operatorname{sh} \beta^* \right] + \beta^*; \quad \tau_0^* = \tau \omega_0; \quad \beta^* = \frac{\omega_0 \beta}{4}.$$

Окончательно перенормированное выражение для 1D-квазиклассического инстантонного действия с учетом двух локальных мод диэлектрической матрицы принимает вид

$$\begin{aligned} \tilde{S}_B = \frac{S_B}{\omega_0 a^2} = & 2(b^*+1)\tau_0^* - \frac{1}{2\beta^*}(b^*+1)^2\tau_0^{*2} - \frac{(b^*+1)^2}{\beta^*} \left\{ \frac{1}{2} \left[\beta_0 \omega_0^2 \left(\frac{\beta \omega_0}{4} \right)^2 \frac{2}{3} + \right. \right. \\ & + 4 \frac{\gamma \omega_0^2 \left(\frac{\beta \omega_0}{4} \right)^2}{\pi^2} \left[-\frac{4\pi^2}{2x_1 \beta^2} - \frac{\pi^2}{\sqrt{x_1} \beta} \operatorname{ctg} \left(\frac{\sqrt{x_1} \beta}{2\pi} \right) \right] + \\ & + 4 \frac{\phi \omega_0^2 \beta^{*2}}{\pi^2} \left[-\frac{4\pi^2}{2x_2 \beta^2} - \frac{\pi^2}{\sqrt{x_2} \beta} \operatorname{ctg} \left(\frac{\sqrt{x_2} \beta}{2\pi} \right) \right] + \\ & \left. \left. + 4 \frac{\Delta \omega_0^2 \beta^{*2}}{\pi^2} \left[-\frac{4\pi^2}{2x_3 \beta^2} - \frac{\pi^2}{\sqrt{x_3} \beta} \operatorname{ctg} \left(\frac{\sqrt{x_3} \beta}{2\pi} \right) \right] \right] \right\} - \\ & - \frac{1}{2} \left[\beta_0 \omega_0^2 \left(\frac{\beta \omega_0}{4} \right)^2 \frac{1}{3} \left(3 \left(\frac{4\pi \tau_0 \omega_0}{\beta \omega_0} \right)^2 - \frac{6\pi^2 \tau_0 \omega_0^4}{\beta \omega_0} + 2\pi^2 \right) + \frac{4\gamma \omega_0^2 \left(\frac{\beta \omega_0}{4} \right)^2}{\pi^2} \times \right. \\ & \times \left\{ \frac{\omega_0 \pi^2 4}{4\sqrt{x_1} \beta \omega_0} \cos \left[\left(\pi - \frac{4\pi \tau_0 \omega_0}{\beta \omega_0} \right) \frac{\sqrt{x_1} 2\beta \omega_0}{\omega_0 \pi 4} \right] \operatorname{cosec} \frac{2\sqrt{x_1} \beta_0 \omega_0}{\omega_0} \frac{4}{4} + \frac{\omega_0^2 \pi^2 4}{8x_1 \beta \omega_0} \right\} + \\ & + \frac{4\phi \omega_0^2 \beta^{*2}}{\pi^2} \left\{ \frac{\omega_0 \pi^2 4}{4\sqrt{x_2} \beta^*} \cos \left[\left(\pi - \frac{4\pi \tau_0^* \omega_0}{\beta^*} \right) \frac{\sqrt{x_2} 2\beta^*}{\omega_0 \pi} \right] \operatorname{cosec} \frac{2\sqrt{x_2} \beta^*}{\omega_0} \beta^* + \frac{\omega_0^2 \pi^2}{8x_2 \beta^{*2}} \right\} + \\ & \left. + \frac{4\Delta \omega_0^2 \beta^{*2}}{\pi^2} \left\{ \frac{\omega_0 \pi^2 4}{4\sqrt{x_3} \beta^*} \cos \left[\left(\pi - \frac{4\pi \tau_0^* \omega_0}{\beta^*} \right) \frac{\sqrt{x_3} 2\beta^*}{\omega_0 \pi} \right] \operatorname{cosec} \frac{2\sqrt{x_3} \beta^*}{\omega_0} \beta^* + \frac{\omega_0^2 \pi^2}{8x_3 \beta^{*2}} \right\} \right]. \quad (\text{П5}) \end{aligned}$$

В случае неосциллирующего режима переноса будем иметь

$$S_B = 2(1+b)a\tau_0 - \frac{1}{2\beta} \omega_0^2 (1+b)^2 \tau_0^{*2} - \frac{\omega_0^4 (1+b)^2 \{U_1 - U_2\}}{\beta},$$

где

$$\tau_0 = \frac{1}{2\omega_0} \operatorname{Arcsh} \left[\frac{b-a}{b+a} \operatorname{sh} \frac{\omega_0 \beta}{4} \right] + \frac{\beta}{4} = \frac{1}{2\omega_0} \operatorname{Arcsh} \left[\frac{b/a-1}{b/a+1} \operatorname{sh} \frac{\omega_0 \beta}{4} \right] + \frac{\beta}{4},$$

или

$$\tau_0^* = \omega_0 \tau_0 = \frac{1}{2} \operatorname{Arcsh} \left[\frac{b^*-1}{b^*+1} \operatorname{sh} \beta^* \right] + \beta^*.$$

Если $x_1, x_2, x_3 < 0$ ($x_{10}, x_{20}, x_{30} > 0$), то

$$\begin{aligned} U_1 &= \frac{1}{2} \left\{ \beta_0 \frac{\beta^2}{24} + \frac{\gamma \beta^2}{4\pi^2} \left[\frac{1}{2\tilde{x}_{10}^2} + \frac{\pi}{2\tilde{x}_{10}} \operatorname{cth}(\pi \tilde{x}_{10}) \right] + \right. \\ &+ \frac{\varphi \beta^2}{4\pi^2} \left[\frac{1}{2\tilde{x}_{20}^2} + \frac{\pi}{2\tilde{x}_{20}} \operatorname{cth}(\pi \tilde{x}_{20}) \right] + \left. \frac{\Delta \beta^2}{4\pi^2} \left[\frac{1}{2\tilde{x}_{30}^2} + \frac{\pi^2}{2\tilde{x}_{30}} \operatorname{cth}(\pi \tilde{x}_{30}) \right] \right\}, \\ U_2 &= \frac{1}{2} \left\{ \frac{\beta_0 \beta^2}{48} \left(3 \left(\frac{4\pi \tau_0}{\beta} \right)^2 - \frac{24\pi^2 \tau_0}{\beta} + 2\pi^2 \right) + \right. \\ &+ \frac{\gamma \beta^2}{4\pi^2} \left\{ \frac{\pi^2}{\sqrt{x_{10}} \beta} \operatorname{ch} \left[\left(\pi - \frac{4\pi \tau_0}{\beta} \right) \frac{\sqrt{x_{10}} \beta}{2\pi} \right] \operatorname{cosech} \frac{\sqrt{x_{10}} \beta}{2} - \frac{2\pi^2}{x_{10} \beta^2} \right\} + \\ &+ \frac{\varphi \beta^2}{4\pi^2} \left\{ \frac{\pi^2}{\sqrt{x_{20}} \beta} \operatorname{ch} \left[\left(\pi - \frac{4\pi \tau_0}{\beta} \right) \frac{\sqrt{x_{20}} \beta}{2\pi} \right] \operatorname{cosech} \frac{\sqrt{x_{20}} \beta}{2} - \frac{2\pi^2}{x_{20} \beta^2} \right\} + \\ &+ \left. \frac{\Delta \beta^2}{4\pi^2} \left\{ \frac{\pi^2}{\sqrt{x_{30}} \beta} \operatorname{ch} \left[\left(\pi - \frac{4\pi \tau_0}{\beta} \right) \frac{\sqrt{x_{30}} \beta}{2\pi} \right] \operatorname{cosech} \frac{\sqrt{x_{30}} \beta}{2} - \frac{2\pi^2}{x_{30} \beta^2} \right\} \right\}. \end{aligned}$$

Перейдем к вычислению предэкспоненциального фактора B с учетом двух промотирующих фононных мод:

$$B = \frac{2\omega_0^2 (a+b)^2}{(2\pi\beta)^{\frac{1}{2}}} \frac{\sum_{n=-\infty}^{\infty} \frac{\sin^2 v_n \tau_0}{\lambda_{0n}}}{\left[\sum_{n=-\infty}^{\infty} \frac{\cos 2v_n \tau_0}{\lambda_{0n}} \right]^{1/2}},$$

где $\lambda_{0n} = v_n^2 + \omega_0^2 + \zeta_n$.

Обезразмеренный предэкспоненциальный фактор определяется суммами двух типов:

$$\tilde{B} = \frac{B}{a^2 \omega^{3/2}} = \frac{2\omega_0^2 \left(\frac{b}{a} + 1\right)^2}{(2\pi\beta)^{1/2}} \frac{V_1}{(V_2)^{1/2}},$$

$$V_1 = \sum_{n=-\infty}^{\infty} \frac{\sin^2 v_n \tau_0}{\lambda_{0n}} = \frac{1}{2} \frac{D\beta^2}{4\pi^2} \left[-\frac{4\pi^2}{x_1\beta^2} + 2 \left\{ -\frac{2\pi^2}{x_{10}\beta^2} - \frac{\pi^2}{\sqrt{x_1}\beta} \operatorname{ctg} \frac{\sqrt{x_1}\beta}{2} \right\} \right] +$$

$$+ \frac{1}{2} \frac{E\beta^2}{4\pi^2} \left[-\frac{4\pi^2}{x_2\beta^2} + 2 \left\{ -\frac{2\pi^2}{x_{20}\beta^2} - \frac{\pi^2}{\sqrt{x_2}\beta} \operatorname{ctg} \frac{\sqrt{x_2}\beta}{2} \right\} \right] +$$

$$+ \frac{1}{2} \frac{F\beta^2}{4\pi^2} \left[-\frac{4\pi^2}{x_3\beta^2} + 2 \left\{ -\frac{2\pi^2}{x_{30}\beta^2} - \frac{\pi^2}{\sqrt{x_3}\beta} \operatorname{ctg} \frac{\sqrt{x_3}\beta}{2} \right\} \right] -$$

$$- \frac{1}{2} \frac{D\beta^2}{4\pi^2} \left[-\frac{4\pi^2}{x_1\beta^2} + 2 \left\{ -\frac{\pi^2}{\sqrt{x_1}\beta} \cos \left[\left(\pi - \frac{4\pi\tau_0}{\beta} \right) \frac{\sqrt{x_1}\beta}{2\pi} \right] \operatorname{cosec} \frac{\sqrt{x_1}\beta}{2} + \frac{2\pi^2}{x_1\beta^2} \right\} \right] -$$

$$- \frac{1}{2} \frac{E\beta^2}{4\pi^2} \left[-\frac{4\pi^2}{x_2\beta^2} + 2 \left\{ -\frac{\pi^2}{\sqrt{x_2}\beta} \cos \left[\left(\pi - \frac{4\pi\tau_0}{\beta} \right) \frac{\sqrt{x_2}\beta}{2\pi} \right] \operatorname{cosec} \frac{\sqrt{x_2}\beta}{2} + \frac{2\pi^2}{x_2\beta^2} \right\} \right] -$$

$$- \frac{1}{2} \frac{F\beta^2}{4\pi^2} \left[-\frac{4\pi^2}{x_3\beta^2} + 2 \left\{ -\frac{\pi^2}{\sqrt{x_3}\beta} \cos \left[\left(\pi - \frac{4\pi\tau_0}{\beta} \right) \frac{\sqrt{x_3}\beta}{2\pi} \right] \operatorname{cosec} \frac{\sqrt{x_3}\beta}{2} + \frac{2\pi^2}{x_3\beta^2} \right\} \right];$$

$$V_2 = \sum_{n=-\infty}^{\infty} \frac{\cos 2v_n \tau_0}{\lambda_{0n}} =$$

$$= \frac{D\beta^2}{4\pi^2} \left[-\frac{4\pi^2}{x_1\beta^2} + 2 \left\{ -\frac{\pi^2}{\sqrt{x_1}\beta} \cos \left[\left(\pi - \frac{4\pi\tau_0}{\beta} \right) \frac{\sqrt{x_1}\beta}{2\pi} \right] \operatorname{cosec} \frac{\sqrt{x_1}\beta}{2} + \frac{2\pi^2}{x_1\beta^2} \right\} \right] +$$

$$+ \frac{E\beta^2}{4\pi^2} \left[-\frac{4\pi^2}{x_2\beta^2} + 2 \left\{ -\frac{\pi^2}{\sqrt{x_2}\beta} \cos \left[\left(\pi - \frac{4\pi\tau_0}{\beta} \right) \frac{\sqrt{x_2}\beta}{2\pi} \right] \operatorname{cosec} \frac{\sqrt{x_2}\beta}{2} + \frac{2\pi^2}{x_2\beta^2} \right\} \right] +$$

$$+ \frac{F\beta^2}{4\pi^2} \left[-\frac{4\pi^2}{x_3\beta^2} + 2 \left\{ -\frac{\pi^2}{\sqrt{x_3}\beta} \cos \left[\left(\pi - \frac{4\pi\tau_0}{\beta} \right) \frac{\sqrt{x_3}\beta}{2\pi} \right] \operatorname{cosec} \frac{\sqrt{x_3}\beta}{2} + \frac{2\pi^2}{x_3\beta^2} \right\} \right]. \quad (\Pi 6)$$

В случае неосциллирующего режима переноса получим

$$\tilde{B} = \frac{B}{a^2 \omega_0^{3/2}} = \frac{2(b^* + 1)^2}{(2\pi\beta^*)^{1/2}} \frac{\tilde{V}_1}{\tilde{V}_2^{1/2}},$$

$$\begin{aligned}
 V_1 = & \sum_{n=-\infty}^{\infty} \frac{\sin^2 v_n \tau_0}{\lambda_{0n}} = \frac{1}{2} \frac{D\beta^2}{4\pi^2} \left[-\frac{4\pi^2}{x_1\beta} + 2 \left\{ \frac{2\pi^2}{x_{10}\beta^2} + \frac{\pi^2}{\sqrt{x_{10}\beta}} \operatorname{cth} \frac{\sqrt{x_{10}\beta}}{2} \right\} \right] + \\
 & + \frac{1}{2} \frac{E\beta^2}{4\pi^2} \left[-\frac{4\pi^2}{x_2\beta^2} + 2 \left\{ \frac{2\pi^2}{x_{20}\beta^2} + \frac{\pi^2}{\sqrt{x_{20}\beta}} \operatorname{cth} \frac{\sqrt{x_{20}\beta}}{2} \right\} \right] + \\
 & + \frac{1}{2} \frac{F\beta^2}{4\pi^2} \left[-\frac{4\pi^2}{x_3\beta^2} + 2 \left\{ \frac{2\pi^2}{x_{30}\beta^2} + \frac{\pi^2}{\sqrt{x_{30}\beta}} \operatorname{cth} \frac{\sqrt{x_{30}\beta}}{2} \right\} \right] - \\
 & - \frac{1}{2} \frac{D\beta^2}{4\pi^2} \left[-\frac{4\pi^2}{x_1\beta^2} + 2 \left\{ \frac{\pi^2}{\sqrt{x_{10}\beta}} \operatorname{ch} \left[\left(1 - \frac{4\tau_0}{\beta} \right) \frac{\sqrt{x_{10}\beta}}{2} \right] \operatorname{cosech} \frac{x_{10}\beta}{2} - \frac{2\pi^2}{x_{10}\beta^2} \right\} \right] - \\
 & - \frac{1}{2} \frac{E\beta^2}{4\pi^2} \left[-\frac{4\pi^2}{x_2\beta^2} + 2 \left\{ \frac{\pi^2}{\sqrt{x_{20}\beta}} \operatorname{ch} \left[\left(1 - \frac{\tau_0^*}{\beta^*} \right) \frac{\sqrt{x_{20}\beta}}{2} \right] \operatorname{cosech} \frac{\sqrt{x_{20}\beta}}{2} - \frac{2\pi^2}{x_{20}\beta^2} \right\} \right] - \\
 & - \frac{1}{2} \frac{F\beta^2}{4\pi^2} \left[-\frac{4\pi^2}{x_3\beta^2} + 2 \left\{ \frac{\pi^2}{\sqrt{x_{30}\beta}} \operatorname{ch} \left[\left(1 - \frac{4\tau_0}{\beta} \right) \frac{\sqrt{x_{30}\beta}}{2} \right] \operatorname{cosech} \frac{\sqrt{x_{30}\beta}}{2} - \frac{2\pi^2}{x_{30}\beta^2} \right\} \right];
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 V_2 = & \sum_{n=-\infty}^{\infty} \frac{\cos v_n \tau_0}{\lambda_{0n}} = \\
 = & \frac{D\beta^2}{4\pi^2} \left[-\frac{4\pi^2}{x_1\beta} + \left\{ \frac{\pi^2}{x_{10}\beta^2} + \frac{\pi^2}{\sqrt{x_{10}\beta}} \operatorname{ch} \left[\left(1 - \frac{4\tau_0}{\beta} \right) \frac{\sqrt{x_{10}\beta}}{2} \right] \operatorname{cosech} \frac{\sqrt{x_{10}\beta}}{2} - \frac{2\pi^2}{x_{10}\beta^2} \right\} \right] + \\
 & + \frac{1}{2} \frac{E\beta^2}{4\pi^2} \left[-\frac{4\pi^2}{x_2\beta^2} + 2 \left\{ \frac{2\pi^2}{x_{20}\beta^2} + \frac{\pi^2}{\sqrt{x_{20}\beta}} \operatorname{cth} \frac{\sqrt{x_{20}\beta}}{2} \right\} \right] + \\
 & + \frac{1}{2} \frac{F\beta^2}{4\pi^2} \left[-\frac{4\pi^2}{x_3\beta^2} + 2 \left\{ \frac{2\pi^2}{x_{30}\beta^2} + \frac{\pi^2}{\sqrt{x_{30}\beta}} \operatorname{cth} \frac{\sqrt{x_{30}\beta}}{2} \right\} \right]. \quad (\text{П7})
 \end{aligned}$$

Приложение Б

Для вычисления безразмерного действия в вероятности 2D-диссипативного туннелирования рассчитаем суммы в формуле (15). Более просто вычисляются суммы $\Sigma_3 - \Sigma_6$, которые не содержат величин ζ_n .

В результате для Σ_3 получим [10]:

$$\Sigma_3 = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin^2 v_n \tau_1}{v_n^2 (v_n^2 + \omega^2 - 2\alpha)} = \frac{\beta^{*2}}{2\omega^4 \pi^2 (1 - \alpha^*)} \left\{ \frac{\pi^2}{6} + \frac{\pi^2}{2(1 - \alpha^*) \beta^{*2}} - \right.$$

$$\begin{aligned}
& -\frac{\pi^2}{2\beta^*\sqrt{1-\alpha^*}}\operatorname{cth}\left(\beta^*\sqrt{1-\alpha^*}\right)+\frac{1}{4}\frac{\tau_1^{*2}\pi^2}{\beta^{*2}}-\frac{\tau_1^*\pi^2}{2\beta^*}+\frac{\pi^2}{6}-\frac{\pi^2}{2\beta^*\sqrt{1-\alpha^*}}\times \\
& \times \operatorname{ch}\left[\sqrt{1-\alpha^*}\left(\beta^*-\tau_1^*\right)\right]\operatorname{cosech}\beta^*\sqrt{1-\alpha^*}+\frac{\pi^2}{2\beta^{*2}\left(1-\alpha^*\right)}\Bigg\}= \\
& =\frac{\beta^{*2}}{2\omega^4\pi^2\left(1-\alpha^*\right)}\left\{\frac{\pi^2}{3}+\frac{\pi^2}{\left(1-\alpha^*\right)\beta^{*2}}-\frac{\pi^2}{2\beta^*\sqrt{1-\alpha^*}}\operatorname{cth}\left(\beta^*\sqrt{1-\alpha^*}\right)+\frac{1}{4}\frac{\tau_1^{*2}\pi^2}{\beta^{*2}}-\right. \\
& \left.-\frac{\tau_1^*\pi^2}{2\beta^*}-\frac{\pi^2}{2\beta^*\sqrt{1-\alpha^*}}\operatorname{ch}\left[\sqrt{1-\alpha^*}\left(\beta^*-\tau_1^*\right)\right]\operatorname{cosech}\beta^*\sqrt{1-\alpha^*}\right\}, \quad \tau_1^*=\tau+\varepsilon. \quad (\text{П8})
\end{aligned}$$

Аналогично можно получить выражения для $\Sigma_4-\Sigma_6$. Перейдем к расчету сумм Σ_1 и Σ_2 . Воспользуемся формулой для Фурье-компонент мацубаровской функции Грина с учетом двух локальных фононных мод [1, 3]:

$$\zeta_n=v_n^2\frac{C_2^2}{\omega_2^2\left(\omega_2^2+v_n^2\right)}+v_n^2\frac{C_3^2}{\omega_3^2\left(\omega_3^2+v_n^2\right)}; \quad \sin^2 v_n\tau_1=\frac{1}{2}(1-\cos 2v_n\tau_1).$$

$$\text{Для вычисления } \Sigma_1=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\sin^2 v_n\tau_1}{v_n^2\left(v_n^2+\omega^2+\zeta_n\right)} \quad \text{необходимо определить}$$

суммы двух видов: U_1 и U_2 :

$$\begin{aligned}
U_1 & \rightarrow =\frac{1}{2}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{v_n^2\left(v_n^2+\omega^2+v_n^2\frac{C_2^2}{\omega_2^2\left(\omega_2^2+v_n^2\right)}+v_n^2\frac{C_3^2}{\omega_3^2\left(\omega_3^2+v_n^2\right)}\right)}- \\
U_2 & \rightarrow -\frac{1}{2}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\cos 2v_n\tau_1}{v_n^2\left(v_n^2+\omega^2+v_n^2\frac{C_2^2}{\omega_2^2\left(\omega_2^2+v_n^2\right)}+v_n^2\frac{C_3^2}{\omega_3^2\left(\omega_3^2+v_n^2\right)}\right)}. \quad (\text{П9})
\end{aligned}$$

Введем обозначения:

$$\begin{aligned}
v_n^2 & =x; \quad A=\omega_2^2+\omega_3^2+\omega^2+\frac{C_2^2}{\omega_2^2}+\frac{C_3^2}{\omega_3^2}, \\
B_\omega & =\omega_2^2\omega_3^2+\omega^2\left(\omega_2^2+\omega_3^2\right)+\frac{C_2^2\omega_3^2}{\omega_2^2}+\frac{C_3^2\omega_2^2}{\omega_3^2}, \quad C=\omega_0^2\omega_2^2\omega_3^2,
\end{aligned}$$

$$x\omega_2^2\omega_3^2(x^3 + Ax^2 + Bx + C) = x\omega_2^2\omega_3^2(x - x_1)(x - x_2)(x - x_3)$$

$$Q = \frac{A^2 - 3B\omega}{9}; \quad R = \frac{2A^3 - 9AB + 27C}{54}; \quad S = Q^3 - R^3; \quad \varphi = \frac{1}{3} \arccos\left(\frac{R}{\sqrt{Q^3}}\right),$$

$$\text{если } S > 0, \text{ то } x_1 = -2\sqrt{Q} \cos \varphi - \frac{A}{3},$$

$$x_2 = -2\sqrt{Q} \cos\left(\varphi + \frac{2}{3}\pi\right) - \frac{A}{3}, \quad x_3 = -2\sqrt{Q} \cos\left(\varphi - \frac{2}{3}\pi\right) - \frac{A}{3},$$

$$U_1 = \frac{1}{2} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(\omega_2^2 + v_n^2)(\omega_3^2 + v_n^2)}{v_n^2(v_n^2 - x_1)(v_n^2 - x_2)(v_n^2 - x_3)}.$$

Тогда U_1 преобразуется к виду

$$U_1 = \frac{1}{2} \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{\beta_0}{v_n^2} + \frac{\gamma}{v_n^2 - x_1} + \frac{\varphi}{v_n^2 - x_2} + \frac{\Delta}{v_n^2 - x_3} \right),$$

где

$$\beta_0, \gamma, \varphi, \Delta \sim \frac{1}{\omega^2}; \quad x_{1,2,3} \sim \omega^2; \quad \beta_0 = -\frac{\omega_2^2\omega_3^2}{x_1x_2x_3},$$

$$\Delta = \frac{x_3^2}{(x_3 - x_2)(x_1 - x_3)} \left\{ \frac{\omega_2^2\omega_3^2}{x_1x_2x_3} \left(\frac{x_1x_2 + x_1x_3 + x_2x_3}{x_2x_3} - 1 \right) + \frac{\omega_2^2 + \omega_3^2}{x_2x_3} - \right. \\ \left. - \frac{1}{x_3} \left[1 + \frac{\omega_2^2\omega_3^2}{x_1x_2x_3} \left(\frac{x_1x_2 + x_1x_3 + x_2x_3}{x_2x_3} + (x_2 + x_3 - x_1) \right) \right] + \frac{(\omega_2^2 + \omega_3^2)(x_2 + x_3)}{x_2x_3} \right\};$$

$$\varphi = \frac{x_2}{x_3(x_2 - x_1)} \left\{ \Delta \frac{x_2}{x_3} (x_1 - x_3) - 1 - \frac{\omega_2^2 + \omega_3^2}{x_2x_3} (x_2 + x_3 - x_1) - \right. \\ \left. - \frac{(x_2 + x_3)}{x_2x_3} \left\{ \omega_2^2 + \omega_3^2 + \frac{\omega_2^2 + \omega_3^2}{x_1x_2x_3} (x_1x_2 + x_1x_3 + x_2x_3) \right\} \right\},$$

$$\gamma = \frac{1}{x_2x_3} \left\{ \omega_2^2 + \omega_3^2 - \Delta x_1x_2 - \varphi x_1x_3 - \beta_0 (x_2x_3 + x_1(x_2 + x_3)) \right\}.$$

Выражение для U_1 будет иметь следующий вид (в относительных единицах):

– если $x_1, x_2, x_3 < 0$ ($x_{10}, x_{20}, x_{30} > 0$):

$$\begin{aligned}
 U_1 = & \frac{1}{2} \left[\frac{\gamma \beta^2}{4\pi^2} \left[-\frac{1}{2\tilde{x}_{10}^2} + \frac{\pi}{2\tilde{x}_{10}} \operatorname{cth} \pi \tilde{x}_{10} \right] + \right. \\
 & \left. + \frac{\varphi \beta^2}{4\pi^2} \left[-\frac{1}{2\tilde{x}_{20}^2} + \frac{\pi}{2\tilde{x}_{20}} \operatorname{cth} \pi \tilde{x}_{20} \right] + \frac{\Delta \beta^2}{4\pi^2} \left[-\frac{1}{2\tilde{x}_{30}^2} + \frac{\pi}{2\tilde{x}_{30}} \operatorname{cth} \pi \tilde{x}_{30} \right] + \beta_0 \frac{\beta^2}{24} \right], \\
 & x_{10(20,30)} \sim \omega^2, \\
 & \tilde{x}_{10}^2 = \frac{x_{10}\beta^2}{4\pi^2} \cdot \frac{\omega^2}{\omega^2} = \underbrace{\frac{x_{10}\beta^{*2}}{\pi^2\omega^2}}_{\text{безразмерно}}; \quad (\text{П10})
 \end{aligned}$$

– если $x_1, x_2, x_3 > 0$ ($x_{10}, x_{20}, x_{30} < 0$):

$$\begin{aligned}
 U_1 = & \frac{1}{2} \left[\frac{\gamma \beta^2}{4\pi^2} \left[\frac{1}{2\tilde{x}_1^2} - \frac{\pi}{2\tilde{x}_1} \operatorname{ctg} \pi \tilde{x}_1 \right] + \right. \\
 & \left. + \frac{\varphi \beta^2}{4\pi^2} \left[\frac{1}{2\tilde{x}_2^2} - \frac{\pi}{2\tilde{x}_2} \operatorname{ctg} \pi \tilde{x}_2 \right] + \frac{\Delta \beta^2}{4\pi^2} \left[\frac{1}{2\tilde{x}_3^2} - \frac{\pi}{2\tilde{x}_3} \operatorname{ctg} \pi \tilde{x}_3 \right] + \beta_0 \frac{\beta^2}{24} \right]. \quad (\text{П11})
 \end{aligned}$$

Аналогично рассчитывается функция U_2 . В зависимости от знаков корней кубического полинома в знаменателе выражения для U_2 получим два режима туннелирования: неосциллирующий ($x_1, x_2, x_3 < 0$) и осциллирующий ($x_1, x_2, x_3 > 0$):

$$\begin{aligned}
 & x_1, x_2, x_3 < 0; \quad x_{10}, x_{20}, x_{30} > 0, \\
 U_2 = & \frac{1}{2\omega^4} \left\{ \frac{\beta^{*2}(\beta_0\omega^2)}{12\pi^2} \left(3 \left(\frac{\pi\tau_1^*}{\beta^*} \right)^2 - 6\pi \left(\frac{\pi\tau_1^*}{\beta^*} \right) + 2\pi^2 \right) + \right. \\
 & + \frac{(\gamma\omega^2)\beta^{*2}}{\pi^2} \left[\frac{\pi^2}{2\sqrt{x_{10}\beta^*}} \operatorname{ch} \left[\left(1 - \frac{\tau_1^*}{\beta^*} \right) \frac{\sqrt{x_{10}\beta^*}}{\omega} \right] \cdot \operatorname{cosech} \frac{\sqrt{x_{10}\beta^*}}{\omega} - \frac{\pi^2}{2\frac{x_{10}}{\omega^2}\beta^{*2}} \right] + \\
 & + \frac{(\varphi\omega^2)\beta^{*2}}{\pi^2} \left[\frac{\pi^2}{2\sqrt{x_{20}\beta^*}} \operatorname{ch} \left[\left(1 - \frac{\tau_1^*}{\beta^*} \right) \frac{\sqrt{x_{20}\beta^*}}{\omega} \right] \cdot \operatorname{cosech} \frac{\sqrt{x_{20}\beta^*}}{\omega} - \frac{\pi^2}{2\frac{x_{20}}{\omega^2}\beta^{*2}} \right] + \\
 & \left. + \frac{(\Delta\omega^2)\beta^{*2}}{\pi^2} \left[\frac{\pi^2}{2\sqrt{x_{30}\beta^*}} \operatorname{ch} \left[\left(1 - \frac{\tau_1^*}{\beta^*} \right) \frac{\sqrt{x_{30}\beta^*}}{\omega} \right] \cdot \operatorname{cosech} \frac{\sqrt{x_{30}\beta^*}}{\omega} - \frac{\pi^2}{2\frac{x_{30}}{\omega^2}\beta^{*2}} \right] \right\}. \quad (\text{П12})
 \end{aligned}$$

Для параметров $x_1, x_2, x_3 > 0$; $x_{10}, x_{20}, x_{30} < 0$ получаем аналогичный ответ для U_2 , где вместо гиперболических функций присутствуют тригонометрические. Выражение для Σ_2 получим по аналогии с Σ_1 заменой $\tau_1^* \rightarrow \tau_2^* (\tau_2^* = \tau - \varepsilon)$.

В итоге для квазиклассического действия получим

$$S^* = \frac{S}{a^2 \omega} = 2(b^* + 1)\tau + \frac{(b^* + 1)^2 \tau^2}{2\beta^*} - \frac{(b^* + 1)^2 \varepsilon^2}{2(1 - \alpha^*)\beta^*} - \frac{\omega^4 (b^* + 1)^2}{\beta^*} \Sigma, \quad (\text{П13})$$

где суммы Σ определяются из выражений (П8)–(П12); где ε и τ находятся из системы трансцендентных уравнений:

$$\begin{cases} \text{sh } \varepsilon \left[\text{ch } \tau \coth \beta^* - \text{sh } \tau - \coth \beta^* \right] + \frac{1}{1 - \alpha^*} \text{sh} \left(\varepsilon \sqrt{1 - \alpha^*} \right) \times \\ \times \left[\text{ch} \left(\tau \sqrt{1 - \alpha^*} \right) \coth \left(\beta^* \sqrt{1 - \alpha^*} \right) - \text{sh} \left(\tau \sqrt{1 - \alpha^*} \right) + \coth \left(\beta^* \sqrt{1 - \alpha^*} \right) \right] = 0, \\ 3 - \frac{4}{1 + b^*} - \frac{1}{1 - \alpha^*} + \text{ch } \varepsilon \left[\text{sh } \tau \coth \beta^* - \text{ch } \tau - 1 \right] + \text{sh } \tau \coth \beta^* - \text{ch } \tau + \\ + \frac{1}{1 - \alpha^*} \text{ch} \left(\varepsilon \sqrt{1 - \alpha^*} \right) \left[\text{sh} \left(\tau \sqrt{1 - \alpha^*} \right) \coth \left(\beta^* \sqrt{1 - \alpha^*} \right) - \text{ch} \left(\tau \sqrt{1 - \alpha^*} \right) + 1 \right] - \\ - \frac{1}{1 - \alpha^*} \left[\text{sh} \left(\tau \sqrt{1 - \alpha^*} \right) \coth \left(\beta^* \sqrt{1 - \alpha^*} \right) - \text{ch} \left(\tau \sqrt{1 - \alpha^*} \right) \right] = 0. \end{cases} \quad (\text{П14})$$

В случае синхронного режима параллельного 2D-переноса вычислим предэкспоненциальный фактор B . Предположим, что $B_{2D} = 2B_{1D}$, тогда

$$B = \frac{2\omega_0^2 (a + b)^2}{(2\pi\beta)^{1/2}} = \frac{\sum_{n=-\infty}^{\infty} \frac{\sin^2 v_n \tau_0}{\lambda_{0n}}}{\left[\sum_{n=-\infty}^{\infty} \frac{\cos 2v_n \tau_0}{\lambda_{0n}} \right]^{1/2}},$$

где

$$\begin{aligned} \lambda_{0n} &= v_n^2 + \omega_0^2 + \varsigma_n, \\ \varsigma_n &= v_n^2 \frac{C_2^2}{\omega_2^2 (\omega_2^2 + v_n^2)} + v_n^2 \frac{C_3^2}{\omega_3^2 (\omega_3^2 + v_n^2)}, \\ v_n &= \frac{2\pi n}{\beta}; \quad \beta = \frac{\hbar}{\kappa \tau}. \end{aligned} \quad (\text{П15})$$

Обезразмеренный предэкспоненциальный фактор имеет вид

$$\tilde{B} = \frac{B}{\omega_0^{5/2} a^2} = \frac{(b^* + 1)^2}{(\pi \beta^*)^{1/2}} \frac{V_1}{V_2^{1/2}},$$

где

$$\begin{aligned} V_1 &= \sum_{n=-\infty}^{\infty} \frac{\frac{1}{2}(1 - \cos 2v_n \tau_0)}{v_n^2 + \omega_0^2 + \frac{v_n^2 C_2^2}{\omega_2^2(\omega_2^2 + v_n^2)} + \frac{v_n^2 C_3^2}{\omega_3^2(\omega_3^2 + v_n^2)}} = \\ &= \frac{1}{2} \sum_{m=-\infty}^{\infty} \frac{(1 - \cos 2v_n \tau_0)(\omega_2^2 + v_n^2)(\omega_3^2 + v_n^2)}{x^3 + Ax^2 + Bx + C}; \\ V_1 &= \frac{1}{2} \sum_{n=-\infty}^{\infty} \frac{(\omega_2^2 + v_n^2)(\omega_3^2 + v_n^2)}{(v_n^2 - x_1)(v_n^2 - x_2)(v_n^2 - x_3)} - \frac{1}{2} \sum_{m=-\infty}^{\infty} \frac{\cos 2v_n \tau_0 (\omega_2^2 + v_n^2)(\omega_3^2 + v_n^2)}{(v_n^2 - x_1)(v_n^2 - x_2)(v_n^2 - x_3)} = \\ &= \frac{1}{2} \sum_{n=-\infty}^{\infty} \left(\frac{D}{v_n^2 - x_1} + \frac{E}{v_n^2 - x_2} + \frac{F}{v_n^2 - x_3} \right) - \\ &- \frac{1}{2} \sum_{n=-\infty}^{\infty} \cos 2v_n \tau_0 \left(\frac{D}{v_n^2 - x_1} + \frac{E}{v_n^2 - x_2} + \frac{F}{v_n^2 - x_3} \right); \quad (\text{П16}) \\ F &= \left\{ (\omega_2^2 + \omega_3^2 + x_2 + x_3) [x_2 x_3 (x_1 + x_3) - x_1 x_3 (x_2 + x_3)] + \right. \\ &+ (x_2 - x_1) \left[(x_2 + x_3) \omega_2^2 \omega_3^2 + x_2 x_3 (\omega_2^2 + \omega_3^2) \right] \} \times \\ &\times \{ (x_2 - x_1) [x_1 x_2 (x_2 + x_3) - x_2 x_3 (x_1 + x_2)] - \\ &- (x_1 - x_3) [x_2 x_3 (x_1 + x_3) - x_1 x_3 (x_2 + x_3)] \}^{-1}; \\ E &= \frac{\omega_2^2 + \omega_3^2 + x_2 + x_3 + F(x_1 - x_3)}{(x_2 - x_1)}; \quad D = -\frac{\omega_2^2 + \omega_3^2 + E(x_1 + x_3) + F(x_1 + x_2)}{(x_2 + x_3)}; \end{aligned}$$

$$x_1, x_2, x_3 < 0; \quad x_{10}, x_{20}, x_{30} > 0,$$

$$V_1 = \frac{1}{2\omega^4} \left\{ \frac{(D\omega^2)\beta^{*2}}{\pi^2} \left[-\frac{\pi^2}{\frac{x_{10}}{\omega^2}\beta^{*2}} + \frac{\pi^2}{2\sqrt{x_{10}}\beta^*} \operatorname{cth} \frac{\sqrt{x_{10}}\beta^*}{\omega} \right] + \frac{(E\omega^2)\beta^{*2}}{\pi^2} \times \right.$$

$$\begin{aligned}
 & \times \left[-\frac{\pi^2}{\frac{x_{20}}{\omega^2} \beta^{*2}} + \frac{\pi^2}{2\sqrt{x_{20}} \beta^*} \operatorname{cth} \frac{\sqrt{x_{20}} \beta^*}{\omega} \right] + \frac{(F\omega^2) \beta^{*2}}{\pi^2} \times \\
 & \times \left[-\frac{\pi^2}{\frac{x_{30}}{\omega^2} \beta^{*2}} + \frac{\pi^2}{2\sqrt{x_{30}} \beta^*} \operatorname{cth} \frac{\sqrt{x_{30}} \beta^*}{\omega} \right] - \frac{(D\omega^2) \beta^{*2}}{\pi^2} \left[-\frac{\pi^2}{\frac{x_1}{\omega^2} \beta^{*2}} + \right. \\
 & \left. + 2 \left\{ \frac{\pi^2}{2\sqrt{x_{10}} \beta^*} \operatorname{ch} \left[\left(1 - \frac{2\tau}{\beta^*} \right) \frac{\sqrt{x_{10}}}{\omega} \beta^* \right] \operatorname{cosech} \frac{\sqrt{x_{10}} \beta^*}{\omega} - \frac{\pi^2}{2\frac{x_{10}}{\omega^2} \beta^{*2}} \right\} - \frac{(E\omega^2) \beta^{*2}}{\pi^2} \times \right. \\
 & \left. \times \left[-\frac{\pi^2}{\frac{x_2}{\omega^2} \beta^{*2}} + 2 \left\{ \frac{\pi^2}{2\sqrt{x_{20}} \beta^*} \operatorname{ch} \left[\left(1 - \frac{2\tau}{\beta^*} \right) \frac{\sqrt{x_{20}}}{\omega} \beta^* \right] \operatorname{cosech} \frac{\sqrt{x_{20}} \beta^*}{\omega} - \frac{\pi^2}{2\frac{x_{20}}{\omega^2} \beta^{*2}} \right\} \right] - \right. \\
 & \left. - \frac{(F\omega^2) \beta^{*2}}{\pi^2} \left[-\frac{\pi^2}{\frac{x_3}{\omega^2} \beta^{*2}} + 2 \left\{ \frac{\pi^2}{2\sqrt{x_{30}} \beta^*} \right. \right. \right. \\
 & \left. \left. + \operatorname{ch} \left[\left(1 - \frac{2\tau}{\beta^*} \right) \frac{\sqrt{x_{30}}}{\omega} \beta^* \right] \operatorname{cosech} \frac{\sqrt{x_{30}} \beta^*}{\omega} - \frac{\pi^2}{2\frac{x_{30}}{\omega^2} \beta^{*2}} \right\} \right] \right] \Bigg\}. \quad (\Pi 17)
 \end{aligned}$$

При $x_1, x_2, x_3 > 0$; $x_{10}, x_{20}, x_{30} < 0$ получаем аналогичный ответ для V_1 , где вместо гиперболических функций присутствуют тригонометрические:

$$V_2 = \sum_{n=-\infty}^{\infty} \frac{\cos 2v_2 \tau_0}{\lambda_{0n}},$$

$$x_1, x_2, x_3 < 0; \quad x_{10}, x_{20}, x_{30} > 0,$$

$$V_2 = \frac{1}{\omega^4} \left\{ \frac{(D\omega^2) \beta^{*2}}{\pi^2} \left[-\frac{\pi^2}{\frac{x_1}{\omega^2} \beta^{*2}} + 2 \left\{ \frac{\pi^2}{2\sqrt{x_{10}} \beta^*} \operatorname{ch} \left[\left(1 - \frac{2\tau}{\beta^*} \right) \frac{\sqrt{x_{10}}}{\omega} \beta^* \right] \times \right. \right. \right. \right.$$

$$\begin{aligned}
& \times \operatorname{cosech} \frac{\sqrt{x_{10}} \beta^*}{\omega} - \frac{\pi^2}{2 \frac{x_{10}}{\omega^2} \beta^{*2}} \left. \right] + \frac{(E \omega^2) \beta^{*2}}{\pi^2} \times \left[-\frac{\pi^2}{\frac{x_2}{\omega^2} \beta^{*2}} + 2 \left\{ \frac{\pi^2}{2 \frac{\sqrt{x_{20}}}{\omega} \beta^*} \times \right. \right. \\
& \times \operatorname{ch} \left[\left(1 - \frac{2\tau}{\beta^*} \right) \frac{\sqrt{x_{20}}}{\omega} \beta^* \right] \operatorname{cosech} \frac{\sqrt{x_{20}} \beta^*}{\omega} - \frac{\pi^2}{2 \frac{x_{20}}{\omega^2} \beta^{*2}} \left. \right] + \frac{(F \omega^2) \beta^{*2}}{\pi^2} \times \left[-\frac{\pi^2}{\frac{x_3}{\omega^2} \beta^{*2}} + \right. \\
& \left. \left. + 2 \left\{ \frac{\pi^2}{2 \frac{\sqrt{x_{30}}}{\omega} \beta^*} \operatorname{ch} \left[\left(1 - \frac{2\tau}{\beta^*} \right) \frac{\sqrt{x_{30}}}{\omega} \beta^* \right] \operatorname{cosech} \frac{\sqrt{x_{30}} \beta^*}{\omega} - \frac{\pi^2}{2 \frac{x_{30}}{\omega^2} \beta^{*2}} \right\} \right] \right]. \quad (\text{П18})
\end{aligned}$$

При $x_1, x_2, x_3 > 0$; $x_{10}, x_{20}, x_{30} < 0$ получаем аналогичный ответ для V_2 , где гиперболические функции заменяются на тригонометрические.

Кревчик Павел Владимирович

аспирант, Пензенский государственный университет (Россия, г. Пенза, ул. Красная, 40)

E-mail: physics@pnzgu.ru

Krevchik Pavel Vladimirovich

Postgraduate student, Penza State University (40 Krasnaya street, Penza, Russia)

Кревчик Владимир Дмитриевич

доктор физико-математических наук, профессор, декан факультета приборостроения, информационных технологий и электроники, Пензенский государственный университет (Россия, г. Пенза, ул. Красная, 40)

E-mail: physics@pnzgu.ru

Krevchik Vladimir Dmitrievich

Doctor of physical and mathematical sciences, professor, dean of the faculty of instrument engineering, information technology and electronics, Penza State University (40 Krasnaya street, Penza, Russia)

Семенов Михаил Борисович

доктор физико-математических наук, профессор, заведующий кафедрой физики, Пензенский государственный университет (Россия, г. Пенза, ул. Красная, 40)

E-mail: physics@pnzgu.ru

Semenov Mikhail Borisovich

Doctor of physical and mathematical sciences, professor, head of sub-department of physics, Penza State University (40 Krasnaya street, Penza, Russia)

УДК 539.23; 539.216.1

Кревчик, П. В.

Эффекты диссипативного туннелирования: теория и сравнение с экспериментом / П. В. Кревчик, В. Д. Кревчик, М. Б. Семенов // Известия высших учебных заведений. Поволжский регион. Физико-математические науки. – 2016. – № 2 (38). – С. 147–180. DOI 10.21685/2072-3040-2016-2-12